Asymptotiques en grande population de modèles épidémiologiques en environnement aléatoire

Édouard STRICKLER (CNRS, IECL)
En collaboration avec Adrien Prodhomme (CMAP et Université de Tours)

Journées de Probabilités, Guidel

22 Juin 2021

Figure – États-Unis d'Amérique, années 1940

1. Modèle de Lajmanovich et Yorke
2. Modèle "naissance" et "mort"
3. Modèle en environnement aléatoire
4. Modèle "naissance" et "mort" en environnement aléatoire

Modèle de Lajmanovich et Yorke : SIS multi-d (1976)

- Maladie qui ne confère pas d'immunité (e.g. gonorrhée)

Modèle de Lajmanovich et Yorke : SIS multi-d (1976)

- Maladie qui ne confère pas d'immunité (e.g. gonorrhée)
- Population inhomogène divisée en d groupes
  (par ex : $d = 2$, femmes / hommes)

Modèle de Lajmanovich et Yorke : SIS multi-d (1976)

- Maladie qui ne confère pas d'immunité (e.g. gonorrhée)
- Population inhomogène divisée en d groupes
  (par ex : $d = 2$, femmes / hommes)
- $x_i = x_i(t) \in [0, 1]$: proportion d'infectés dans groupe i au temps t :

Modèle de Lajmanovich et Yorke : SIS multi-d (1976)

- Maladie qui ne confère pas d'immunité (e.g. gonorrhée)
- Population inhomogène divisée en d groupes
  (par ex : $d = 2$, femmes / hommes)
- $x_i = x_i(t) \in [0, 1]$: proportion d'infectés dans groupe i au temps t :

$$\frac{dx_i}{dt} = (1 - x_i) \sum_j C_{i,j} x_j - D_i x_i$$

avec

Modèle de Lajmanovich et Yorke : SIS multi-d (1976)

- Maladie qui ne confère pas d'immunité (e.g. gonorrhée)
- Population inhomogène divisée en d groupes (par ex : $d = 2$, femmes / hommes)
- $x_i = x_i(t) \in [0, 1]$: proportion d'infectés dans groupe i au temps t :

$$\frac{dx_i}{dt} = (1 - x_i) \sum_j C_{i,j} x_j - D_i x_i$$

avec

  - $1 - x_i$: proportion susceptibles groupe i.

Modèle de Lajmanovich et Yorke : SIS multi-d (1976)

- Maladie qui ne confère pas d'immunité (e.g. gonorrhée)
- Population inhomogène divisée en d groupes
  (par ex : $d = 2$, femmes / hommes)
- $x_i = x_i(t) \in [0, 1]$: proportion d'infectés dans groupe i au temps t :

$$\frac{dx_i}{dt} = (1 - x_i) \sum_j C_{i,j} x_j - D_i x_i$$

  avec
  - $1 - x_i$: proportion susceptibles groupe i.
  - $C_{i,j}$: taux de transmission infecté groupe j vers susceptible groupe i

Modèle de Lajmanovich et Yorke : SIS multi-d (1976)

- Maladie qui ne confère pas d'immunité (e.g. gonorrhée)
- Population inhomogène divisée en d groupes
  (par ex : $d = 2$, femmes / hommes)
- $x_i = x_i(t) \in [0, 1]$: proportion d'infectés dans groupe i au temps t :

$$\frac{dx_i}{dt} = (1 - x_i) \sum_j C_{i,j} x_j - D_i x_i$$

  avec
  - $1 - x_i$: proportion susceptibles groupe i.
  - $C_{i,j}$: taux de transmission infecté groupe j vers susceptible groupe i
  - $D_i > 0$: taux de guérison infecté groupe i.

On pose $x_t = (x_1(t), \dots, x_d(t))$.
$C = (C_{i,j})_{i,j}$ et $A = C - \mathrm{Diag}(D)$.

Théorème (Lajmanovich et Yorke, 1976)

Soit $\lambda(A) = \max\{\mathrm{Re}(\sigma),\ \sigma \in \mathrm{Sp}(A)\}$. Alors

1. Si $\lambda(A) \leq 0$, $x_t \to 0$ quel que soit x_0 : *la maladie disparaît* ;
2. si $\lambda(A) > 0$, $\exists! x^* > 0$ tel que $x_t \to x^*$ pour tout $x_0 \neq 0$: *la maladie s'installe dans la population*

On pose $x_t = (x_1(t), \ldots, x_d(t))$.
$C = (C_{i,j})_{i,j}$ et $A = C - \mathrm{Diag}(D)$.

Théorème (Lajmanovich et Yorke, 1976)

Soit $\lambda(A) = \max\{\mathrm{Re}(\sigma),\ \sigma \in \mathrm{Sp}(A)\}$. Alors

1. Si $\lambda(A) \leq 0$, $x_t \to 0$ quel que soit x_0 : *la maladie disparaît* ;
2. si $\lambda(A) > 0$, $\exists! x^* > 0$ tel que $x_t \to x^*$ pour tout $x_0 \neq 0$: *la maladie s'installe dans la population*

Remarque :

$$\dot{x} = Ax - \mathrm{Diag}(x)Cx := F(x)$$

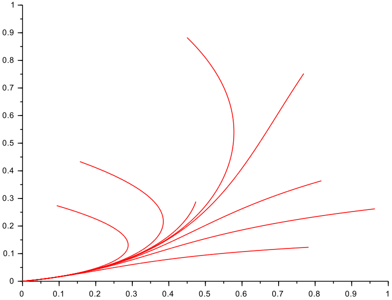
$\rightsquigarrow A = DF(0)$ et

$$\lambda(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|y_t\|$$

où y_t est la solution du système linéarisé en 0

$$\dot{y} = Ay.$$

Exemples en dimension 2



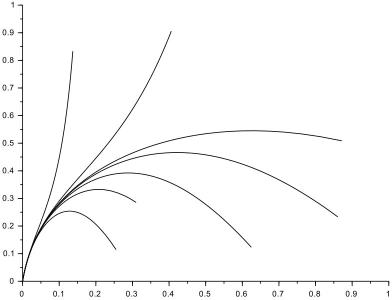


Figure – Deux exemples de choix de C et D pour lesquels la maladie disparaît

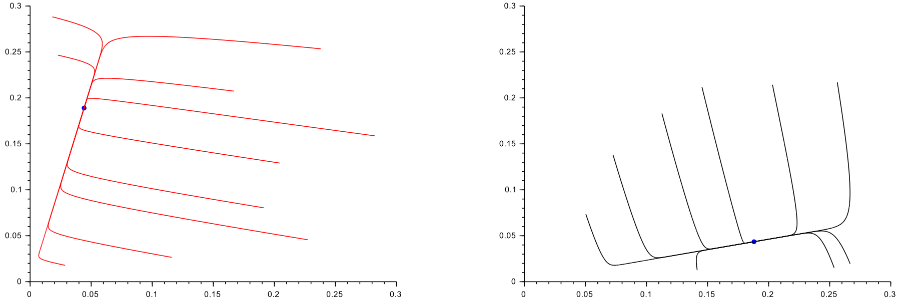


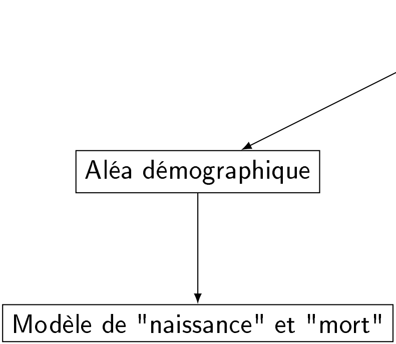
Figure – Deux exemples de choix de C et D pour lesquels la maladie persiste

x^* est le point bleu : proportions dans lequelles la maladie se fixe

Modèles stochastiques connectés

$\boxed{\text{Modèle LY}}$

Modèles stochastiques connectés



Processus de Naissance et mort

- $K_i \geq 1$: taille de la population groupe i ; $K = \sum K_i$: taille totale
- $X_i^K(t) \in \{0, \frac{1}{K_i}, \ldots 1\}$: proportion d'infectés du groupe i.
- Une nouvelle infection a lieu dans le groupe i à taux

$$K_i(1 - x_i) \sum_j C_{i,j} x_j$$

- Une guérison a lieu dans le groupe i à taux

$$K_i D_i x_i$$

Autrement dit : $X_t^K = (X_1^K(t), \ldots, X_d^K(t))$ est une chaîne de Markov sur

$$\{0, \frac{1}{K_1}, \ldots, 1\} \times \ldots \times \{0, \frac{1}{K_d}, \ldots, 1\}$$

de transition

$$\begin{aligned} x = (x_1, \ldots, x_d) &\longrightarrow (x_1, \ldots, x_i + \frac{1}{K_i}, \ldots, x_d) \quad \text{à taux} \quad K_i(1 - x_i) \sum_j C_{i,j} x_j \\ &\longrightarrow (x_1, \ldots, x_i - \frac{1}{K_i}, \ldots, x_d) \quad \text{à taux} \quad K_i D_i x_i \end{aligned}$$

et absorbée en 0.

Autrement dit : $X_t^K = (X_1^K(t), \dots, X_d^K(t))$ est une chaîne de Markov sur

$$\{0, \frac{1}{K_1}, \dots, 1\} \times \dots \times \{0, \frac{1}{K_d}, \dots, 1\}$$

de transition

$$\begin{aligned} x = (x_1, \dots, x_d) &\longrightarrow (x_1, \dots, x_i + \frac{1}{K_i}, \dots, x_d) \quad \text{à taux} \quad K_i(1 - x_i) \sum_j C_{i,j} x_j \\ &\longrightarrow (x_1, \dots, x_i - \frac{1}{K_i}, \dots, x_d) \quad \text{à taux} \quad K_i D_i x_i \end{aligned}$$

et absorbée en 0.

Proposition bien connue (Kurtz)

$$\forall \varepsilon, T > 0, \quad \mathbb{P}\left(\sup_{[0,T]} \|X_t^K - x_t\| \geq \varepsilon \right) \underset{K \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où x_t est la solution du système LY.

Extinction et distribution quasi-stationnaire

Soit

$$\tau_0^K := \inf\{t \geq 0 \ : X_t^K = 0\}$$

X^K chaîne Markov "irreductible" sur espace fini absorbé en 0 $\rightsquigarrow \tau_0^K < +\infty$

Extinction et distribution quasi-stationnaire

Soit

$$\tau_0^K := \inf\{t \geq 0 \ : X_t^K = 0\}$$

X^K chaîne Markov "irreductible" sur espace fini absorbé en 0 $\rightsquigarrow \tau_0^K < +\infty$

Seul distribution stationnaire : $\delta_0 \rightsquigarrow$ pas intéressant.

Définition

μ^K est une **Distribution Quasi-Stationnaire (QSD)** pour X^K si

$$\mathbb{P}_{\mu^K}(X_t^K \in \cdot \,|\, \tau_0^K > t) = \mu^K.$$

(état métastable)

Extinction et distribution quasi-stationnaire

Soit

$$\tau_0^K := \inf\{t \geq 0 \ : X_t^K = 0\}$$

X^K chaîne Markov "irreductible" sur espace fini absorbé en 0 $\rightsquigarrow \tau_0^K < +\infty$

Seul distribution stationnaire : $\delta_0 \rightsquigarrow$ pas intéressant.

Définition

μ^K est une **Distribution Quasi-Stationnaire (QSD)** pour X^K si

$$\mathbb{P}_{\mu^K}(X_t^K \in \cdot \,|\, \tau_0^K > t) = \mu^K.$$

(état métastable)

Questions :

- Comportement de τ_0^K quand $K \to \infty$?
- Comportement de μ^K quand $K \to \infty$?

Asymptotiques de τ_0^K en dimension 1 :

$$\dot{x} = (1-x)Cx - Dx$$

Théorème (Kryscio et Lefévre, 89 ; Andersson et Djehiche, 98 ; Doering, Sargsyan et Sander, 2005)

On suppose que $x_0^K \to x \in (0,1]$. Soit $A := C - D$

1. Si $A > 0$ (persistant)

$$\mathbb{E}_{x_0^K}(\tau_0^K) \sim \frac{c_1}{\sqrt{K}} e^{c_2 K}$$

Asymptotiques de τ_0^K en dimension 1 :

$$\dot{x} = (1-x)Cx - Dx$$

Théorème (Kryscio et Lefévre, 89 ; Andersson et Djehiche, 98 ; Doering, Sargsyan et Sander, 2005)

On suppose que $x_0^K \to x \in (0,1]$. Soit $A := C - D$

1. Si $A > 0$ (persistant)

$$\mathbb{E}_{x_0^K}(\tau_0^K) \sim \frac{c_1}{\sqrt{K}} e^{c_2 K}$$

2. Si $A = 0$ (extinction critique)

$$\mathbb{E}_{x_0^K}(\tau_0^K) \sim c_3 \sqrt{K}$$

Asymptotiques de τ_0^K en dimension 1 :

$$\dot{x} = (1-x)Cx - Dx$$

Théorème (Kryscio et Lefévre, 89 ; Andersson et Djehiche, 98 ; Doering, Sargsyan et Sander, 2005)

On suppose que $x_0^K \to x \in (0,1]$. Soit $A := C - D$

1. Si $A > 0$ (persistant)

$$\mathbb{E}_{x_0^K}(\tau_0^K) \sim \frac{c_1}{\sqrt{K}} e^{c_2 K}$$

2. Si $A = 0$ (extinction critique)

$$\mathbb{E}_{x_0^K}(\tau_0^K) \sim c_3 \sqrt{K}$$

3. Si $A < 0$ (extinction)

$$\mathbb{E}_{x_0^K}(\tau_0^K) \sim c_4 \log(Kx)$$

En dimension d

Rappel : $A = C - \mathrm{Diag}(D)$ et $\lambda(A) = \max\{\mathrm{Re}(\sigma),\ \sigma \in \mathrm{Sp}(A)\}$

- Si $\lambda(A) \leq 0$, $x_t \to 0$,
- si $\lambda(A) > 0$, $x_t \to x^* > 0$.

Théorème (Collet, Chazottes, Méléard, 2018)

Si $\lambda(A) > 0$,

$$e^{d_1 K} \leq \mathbb{E}_{x_0^K}(\tau_0^K) \leq e^{d_2 K}$$

De plus,

$$\mu^K \underset{K \to \infty}{\Longrightarrow} \delta_{x^*}$$

(résultats valables pour des modèles plus généraux)

En dimension d

Rappel : $A = C - \mathrm{Diag}(D)$ et $\lambda(A) = \max\{\mathrm{Re}(\sigma),\ \sigma \in \mathrm{Sp}(A)\}$

- Si $\lambda(A) \leq 0$, $x_t \to 0$,
- si $\lambda(A) > 0$, $x_t \to x^* > 0$.

Théorème (Collet, Chazottes, Méléard, 2018)

Si $\lambda(A) > 0$,

$$e^{d_1 K} \leq \mathbb{E}_{x_0^K}(\tau_0^K) \leq e^{d_2 K}$$

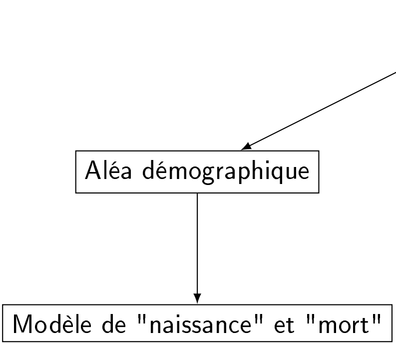
De plus,

$$\mu^K \underset{K \to \infty}{\Longrightarrow} \delta_{x^*}$$

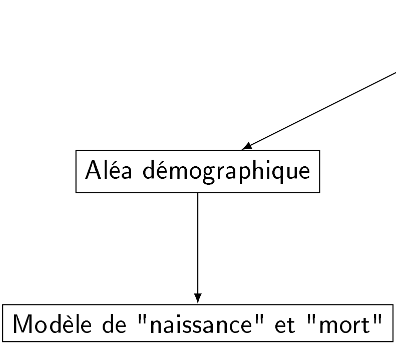
(résultats valables pour des modèles plus généraux)

Quand $K \to \infty$, l'état quasi-stationnaire se concentre sur l'état stationnaire ***persistant*** *du processus limite.*

Modèles stochastiques



Modèles stochastiques



Le modèle en environnement aléatoire (switch markovien)

- E espace fini
- $\xi \in E \rightsquigarrow$ un **environnement** donné par une matrice C^{ξ} et un vecteur D^{ξ}
- Ξ_t une chaîne de Markov irreductible sur $E \rightsquigarrow$ **évolution aléatoire** de l'environnement

Le modèle en environnement aléatoire (switch markovien)

- E espace fini
- $\xi \in E \rightsquigarrow$ un **environnement** donné par une matrice C^{ξ} et un vecteur D^{ξ}
- Ξ_t une chaîne de Markov irreductible sur $E \rightsquigarrow$ **évolution aléatoire** de l'environnement
- $X_t = (X_1(t), \ldots, X_d(t))$ solution de

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = (1 - X_i(t)) \left(\sum_j C_{i,j}^{\Xi_t} X_j(t) \right) - D_i^{\Xi_t} X_i(t)$$

Le modèle en environnement aléatoire (switch markovien)

- E espace fini
- $\xi \in E \rightsquigarrow$ un **environnement** donné par une matrice C^{ξ} et un vecteur D^{ξ}
- Ξ_t une chaîne de Markov irreductible sur $E \rightsquigarrow$ **évolution aléatoire** de l'environnement
- $X_t = (X_1(t), \ldots, X_d(t))$ solution de

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = (1 - X_i(t)) \left(\sum_j C_{i,j}^{\Xi_t} X_j(t) \right) - D_i^{\Xi_t} X_i(t)$$

Le processus (X, Ξ) est un **Processus de Markov Déterministe par Morceaux (PDMP)**.

Un exemple

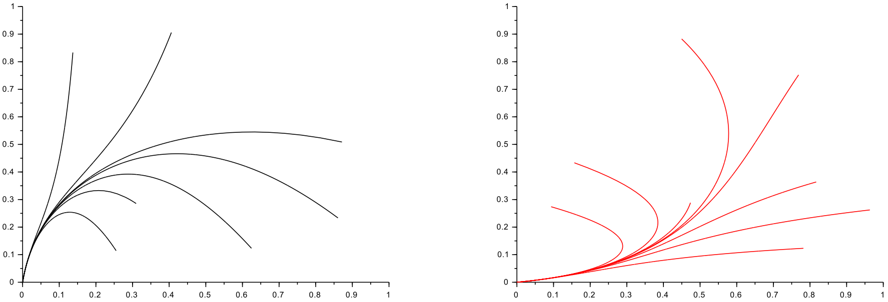
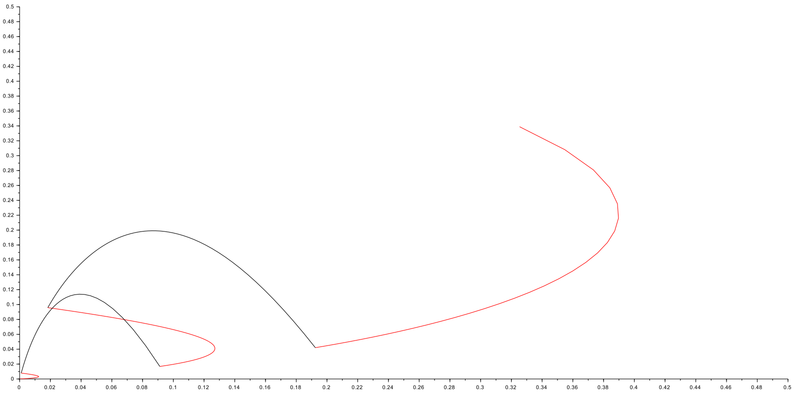


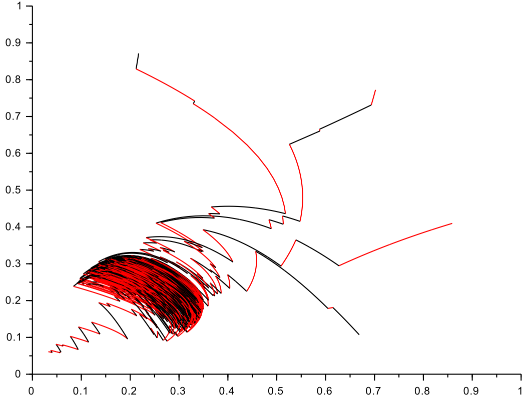
Figure – Environnements ξ_1 et ξ_2 dans lesquels la maladie disparaît

Ξ_t une chaîne de Markov sur $\{\xi_1, \xi_2\}$ avec taux de transition λ_1, λ_2

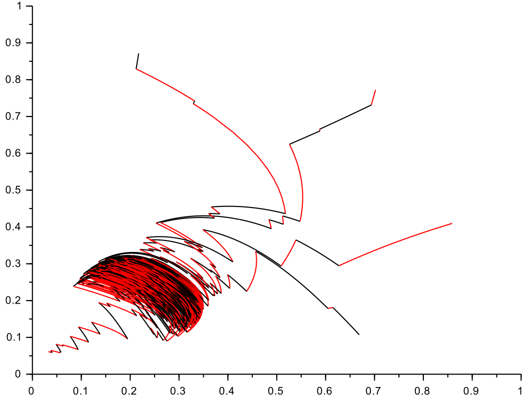
Si l'environnement varie lentement (ie λ_1, λ_2 petits)



Si l'environnement varie rapidement (ie λ_1, λ_2 grands)



Si l'environnement varie rapidement (ie λ_1, λ_2 grands)



L'aléa environnemental peut changer la dynamique : ici, cela favorise la persistance de la maladie dans la population.

Théorème (avec M. Benaïm, 2019)

Soit le *processus linéarisé* Y définie par

$$\frac{dY_t}{dt} = A^{\Xi_t} Y_t = \left(C^{\Xi_t} - \mathrm{Diag}(D^{\Xi_t})\right) Y_t$$

Alors il exists $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{P}_{(y_0,\xi)}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|Y_t\| = \Lambda\right) = 1.$$

Théorème (avec M. Benaïm, 2019)

Soit le *processus linéarisé* Y définie par

$$\frac{dY_t}{dt} = A^{\Xi_t} Y_t = \left(C^{\Xi_t} - \mathrm{Diag}(D^{\Xi_t})\right) Y_t$$

Alors il exists $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{P}_{(y_0,\xi)}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|Y_t\| = \Lambda\right) = 1.$$

Théorème (avec M. Benaïm, 2019 et D. Nguyen, 2020)

Théorème (avec M. Benaïm, 2019)

Soit le *processus linéarisé* Y définie par

$$\frac{dY_t}{dt} = A^{\Xi_t} Y_t = \left(C^{\Xi_t} - \mathrm{Diag}(D^{\Xi_t})\right) Y_t$$

Alors il exists $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{P}_{(y_0,\xi)}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|Y_t\| = \Lambda\right) = 1.$$

Théorème (avec M. Benaïm, 2019 et D. Nguyen, 2020)

1. Si $\Lambda < 0$: $X_t \to 0$ presque sûrement pour tout X_0

Théorème (avec M. Benaïm, 2019)

Soit le *processus linéarisé* Y définie par

$$\frac{dY_t}{dt} = A^{\Xi_t} Y_t = \left(C^{\Xi_t} - \mathrm{Diag}(D^{\Xi_t})\right) Y_t$$

Alors il exists $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^d_+ \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{P}_{(y_0,\xi)}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|Y_t\| = \Lambda\right) = 1.$$

Théorème (avec M. Benaïm, 2019 et D. Nguyen, 2020)

1. Si $\Lambda < 0$: $X_t \to 0$ presque sûrement pour tout X_0
2. si $\Lambda = 0$: $X_t \to 0$ en probabilité pour tout X_0

Théorème (avec M. Benaïm, 2019)

Soit le *processus linéarisé* Y définie par

$$\frac{dY_t}{dt} = A^{\Xi_t} Y_t = \left(C^{\Xi_t} - \mathrm{Diag}(D^{\Xi_t})\right) Y_t$$

Alors il exists $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{P}_{(y_0,\xi)}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|Y_t\| = \Lambda\right) = 1.$$

Théorème (avec M. Benaïm, 2019 et D. Nguyen, 2020)

1. Si $\Lambda < 0$: $X_t \to 0$ presque sûrement pour tout X_0
2. si $\Lambda = 0$: $X_t \to 0$ en probabilité pour tout X_0
3. si $\Lambda > 0$: (X_t, Ξ_t) admet une unique probabilité invariante μ^* **persistante** et $(X_t, \Xi_t) \to \mu^*$ en loi pour tout $X_0 \neq 0$.

Théorème (avec M. Benaïm, 2019)

Soit le *processus linéarisé* Y définie par

$$\frac{dY_t}{dt} = A^{\Xi_t} Y_t = \left(C^{\Xi_t} - \mathrm{Diag}(D^{\Xi_t})\right) Y_t$$

Alors il exists $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^d_+ \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{P}_{(y_0,\xi)}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|Y_t\| = \Lambda\right) = 1.$$

Théorème (avec M. Benaïm, 2019 et D. Nguyen, 2020)

1. Si $\Lambda < 0$: $X_t \to 0$ presque sûrement pour tout X_0
2. si $\Lambda = 0$: $X_t \to 0$ en probabilité pour tout X_0
3. si $\Lambda > 0$: (X_t, Ξ_t) admet une unique probabilité invariante μ^* **persistante** et $(X_t, \Xi_t) \to \mu^*$ en loi pour tout $X_0 \neq 0$.

μ^* **persistante** : $\mu^*(\{0\} \times E) = 0$

Moments de Lyapunov d'ordre p

Proposition (avec Adrien Prodhomme)

Pour tout $p \in \mathbb{R}$, $\exists g(p) \in \mathbb{R}$ tq $\forall (y, \xi) \in (\mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}) \times E$,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}_{(y,\xi)} \left(\| Y_t \|^p \right) = g(p)$$

1. $g(0) = 0$, $g'(0) = \Lambda$
2. $p \mapsto g(p)$ est convexe,
3. Si $\Lambda > 0$, soit $p^* = \inf\{p > 0 : \ g(-p) > 0\}$. Alors $p^* < +\infty$ si et seulement si 0 est **accessible** pour Y.

Moments de Lyapunov d'ordre p

Proposition (avec Adrien Prodhomme)

Pour tout $p \in \mathbb{R}$, $\exists g(p) \in \mathbb{R}$ tq $\forall (y, \xi) \in (\mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}) \times E$,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}_{(y,\xi)} \left(\|Y_t\|^p \right) = g(p)$$

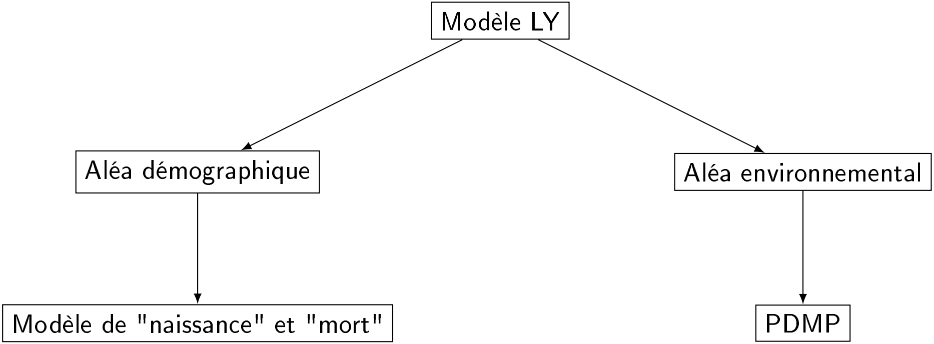
1. $g(0) = 0$, $g'(0) = \Lambda$
2. $p \mapsto g(p)$ est convexe,
3. Si $\Lambda > 0$, soit $p^* = \inf\{p > 0 : \; g(-p) > 0\}$. Alors $p^* < +\infty$ si et seulement si 0 est **accessible** pour Y.

Conséquence pour le non-linéaire

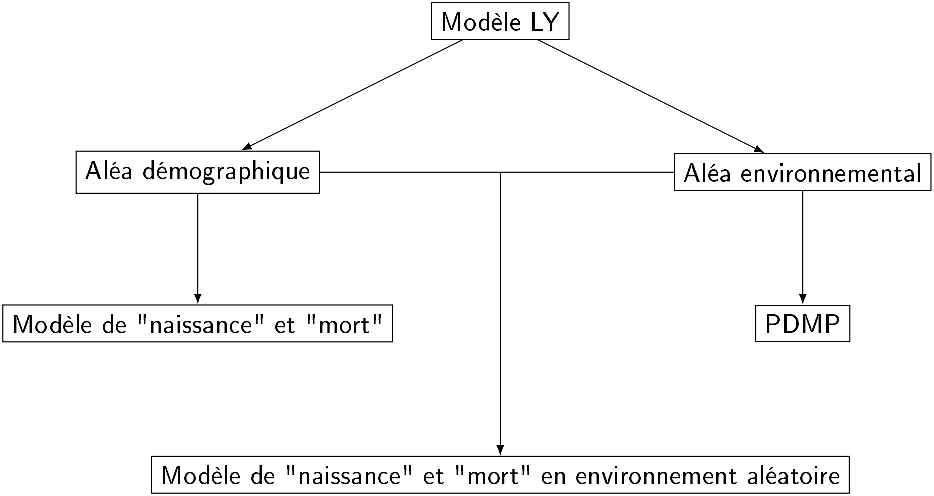
Si $\Lambda > 0$, $\forall p \in (0, p^*)$; $\exists T > 0$, $\gamma_0 \in (0, 1)$ et $\eta > 0$ tq, $\forall \|x\| \leq \eta$,

$$\mathbb{E}_{(x,\xi)} \left(\|X_T\|^{-p} \right) \leq \gamma_0 \|x\|^{-p}.$$

Modèles stochastiques



Modèles stochastiques



- $K_i \geq 1$: taille de la population groupe i ; $K = \sum K_i$: taille totale
- $X_i^K(t) \in \{0, \frac{1}{K_i}, \ldots 1\}$: proportion d'infectés du groupe i.

- $K_i \geq 1$: taille de la population groupe i ; $K = \sum K_i$: taille totale
- $X_i^K(t) \in \{0, \frac{1}{K_i}, \ldots 1\}$: proportion d'infectés du groupe i.
- Ξ_t une chaîne de Markov irreductible sur $E \rightsquigarrow$ **évolution aléatoire** de l'environnement

Processus de Naissance et Mort en environnement aléatoire

- $K_i \geq 1$: taille de la population groupe i ; $K = \sum K_i$: taille totale
- $X_i^K(t) \in \{0, \frac{1}{K_i}, \dots 1\}$: proportion d'infectés du groupe i.
- Ξ_t une chaîne de Markov irreductible sur $E \rightsquigarrow$ **évolution aléatoire** de l'environnement
- Si $\Xi_t = \xi$, une nouvelle infection a lieu dans le groupe i à taux

$$K_i(1 - x_i) \sum_j C_{i,j}^{\xi} x_j$$

- ..et une guérison a lieu dans le groupe i à taux

$$K_i D_i^{\xi} x_i$$

Autrement dit : (X_t^K, Ξ_t) est une chaîne de Markov sur

$$\{0, \frac{1}{K_1}, \dots, 1\} \times \dots \times \{0, \frac{1}{K_d}, \dots, 1\} \times E$$

de transition

$$\begin{aligned}(x,\xi) &\longrightarrow (x_1, \dots, x_i + \frac{1}{K_i}, \dots, x_d, \xi) \quad \text{à taux} \quad K_i(1-x_i)\sum_j C_{i,j}^{\xi} x_j \\ &\longrightarrow (x_1, \dots, x_i - \frac{1}{K_i}, \dots, x_d, \xi) \quad \text{à taux} \quad K_i D_i^{\xi} x_i \\ &\longrightarrow (x, \xi') \quad \text{à taux} \quad q(\xi, \xi')\end{aligned}$$

Autrement dit : (X_t^K, Ξ_t) est une chaîne de Markov sur

$$\{0, \frac{1}{K_1}, \dots, 1\} \times \dots \times \{0, \frac{1}{K_d}, \dots, 1\} \times E$$

de transition

$$\begin{aligned}(x, \xi) &\longrightarrow (x_1, \dots, x_i + \frac{1}{K_i}, \dots, x_d, \xi) \quad \text{à taux} \quad K_i(1 - x_i) \sum_j C_{i,j}^{\xi} x_j \\ &\longrightarrow (x_1, \dots, x_i - \frac{1}{K_i}, \dots, x_d, \xi) \quad \text{à taux} \quad K_i D_i^{\xi} x_i \\ &\longrightarrow (x, \xi') \quad \text{à taux} \quad q(\xi, \xi')\end{aligned}$$

Proposition (avec Adrien Prodhomme)

$$\forall T > 0, \exists C_T > 0 \ : \forall \varepsilon, \mathbb{P}\left(\sup_{[0,T]} \|X_t^K - X_t\| \geq \varepsilon\right) \leq 2de^{-C_T K \varepsilon^2}$$

où X_t est le PDMP associé.

Temps d'extinction

Comme avant,

$$\tau_0^K = \inf\{t \geq 0 \ : X_t^K = 0\} < +\infty$$

Théorème (avec Adrien Prodhomme)

1. Si $\Lambda > 0$, pour tout $p \in (0, p^*)$,

$$\mathbb{E}(\tau_0^K) \geq c_1 K^p$$

2. Si $\Lambda > 0$ et $p^* < +\infty$ (ie, 0 accessible),

$$\mathbb{E}(\tau_0^K) \sim c_2 K^{p^*}$$

3. Si $\Lambda < 0$,

$$\mathbb{E}(\tau_0^K) \leq c_3 \log(K)$$

QSD

Résultats classiques $\rightsquigarrow$ (X^K, Ξ) admet une unique QSD μ^K.

Rappel pour le PDMP

1. Si $\Lambda > 0$, (X, Ξ) admet une unique proba invariante persistante μ^*
2. Si $\Lambda \leq 0$, X_t converge vers 0.

QSD

Résultats classiques $\rightsquigarrow$ (X^K, Ξ) admet une unique QSD μ^K.

Rappel pour le PDMP

1. Si $\Lambda > 0$, (X, Ξ) admet une unique proba invariante persistante μ^*
2. Si $\Lambda \leq 0$, X_t converge vers 0.

Théorème (avec Adrien Prodhomme)

1. Si $\Lambda > 0$,
$$\mu^K \underset{K\to\infty}{\Longrightarrow} \mu^*$$
2. Si $\Lambda \leq 0$,
$$\mu^K(\cdot \times E) \underset{K\to\infty}{\Longrightarrow} \delta_0.$$

Les résultats clés pour la preuve (1)

Proposition

$$\forall T > 0, \exists C_T > 0 \; : \forall \varepsilon, \, \mathbb{P}_{(x,\xi)} \left(\sup_{[0,T]} \frac{\|X_t^K - X_t\|}{\|X_t\|} \geq \varepsilon \right) \leq 2de^{-C_T \|x\| K \varepsilon^2}$$

Les résultats clés pour la preuve (1)

Proposition

$$\forall T > 0, \exists C_T > 0 \ : \forall \varepsilon, \ \mathbb{P}_{(x,\xi)} \left(\sup_{[0,T]} \frac{\|X_t^K - X_t\|}{\|X_t\|} \geq \varepsilon \right) \leq 2d e^{-C_T \|x\| K \varepsilon^2}$$

Proposition (conséquence de l'étude des moments d'ordre p)

Si $\Lambda > 0$, $\forall p \in (0, p^*)$; $\exists T > 0$, $\gamma_0 \in (0,1)$ et $\eta > 0$ tq, $\forall \|x\| \leq \eta$,

$$\mathbb{E}_{(x,\xi)} \left(\|X_T\|^{-p} \right) \leq \gamma_0 \|x\|^{-p}.$$

Les résultats clés pour la preuve (1)

Proposition

$$\forall T > 0, \exists C_T > 0 \ : \forall \varepsilon, \, \mathbb{P}_{(x,\xi)} \left(\sup_{[0,T]} \frac{\|X_t^K - X_t\|}{\|X_t\|} \geq \varepsilon \right) \leq 2d e^{-C_T \|x\| K \varepsilon^2}$$

Proposition (conséquence de l'étude des moments d'ordre p)

Si $\Lambda > 0$, $\forall p \in (0, p^*)$; $\exists T > 0$, $\gamma_0 \in (0,1)$ et $\eta > 0$ tq, $\forall \|x\| \leq \eta$,

$$\mathbb{E}_{(x,\xi)} \left(\|X_T\|^{-p} \right) \leq \gamma_0 \|x\|^{-p}.$$

Proposition

Assume $\Lambda > 0$ and $p < p^*$. There exists $a' > a$, $T > 0$ and $\rho \in (0,1)$ such that, for all $\|x\| \geq a'/K$ and K large enough,

$$\mathbb{E}_{x,\xi} \left(\|X_T^K\|^{-p} \mathbb{1}_{T < \tau_0^K} \right) \leq \rho \|x\|^{-p}$$

Les résultats clés pour la preuve (2)

Pour la convergence de μ^K : une famille de fonctions de Lyapunov

Proposition

Si $\Lambda > 0$, soit $p < p^*$ et $b > 0$, et

$$\varphi_1^K(x, \xi) = \left(\frac{b}{K}\right)^{-p} \wedge \|x\|^{-p}$$

1. Il existe b, $\theta_1 \in (0, 1)$, $T > 0$ et C **indépendants de** K tels que

$$\mathbb{E}_{(x,\xi)}\left[\varphi_1^K(X_T^K, \Xi_T)\mathbb{1}_{\tau_0^K > t}\right] \leq \theta_1 \varphi_1^K(x, \xi) + C$$

2. Pour tout K, il existe $\theta_2(K) \geq e^{-cK^{-p}}$ et φ_2^K tel que

$$\mathbb{E}_{(x,\xi)}\left[\varphi_2^K(X_T^K, \Xi_T)\mathbb{1}_{\tau_0^K > t}\right] \geq \theta_2(K)\varphi_2^K \quad \text{et} \quad \inf_K \inf_{(x,\xi)} \varphi_2^K > 0.$$

Illustrations en dimension 1

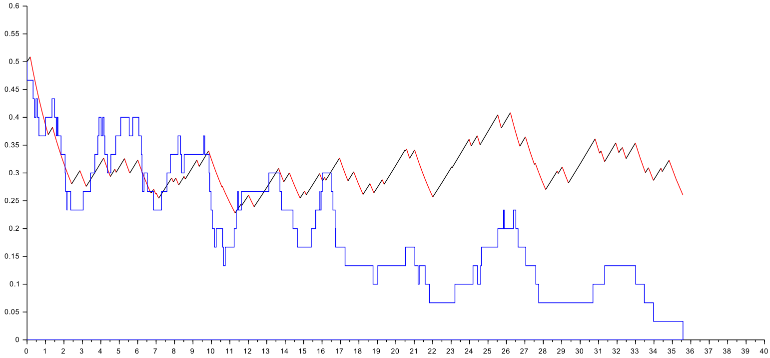


Figure – $K = 30$, naissance et mort en bleu, PDMP noir et rouge

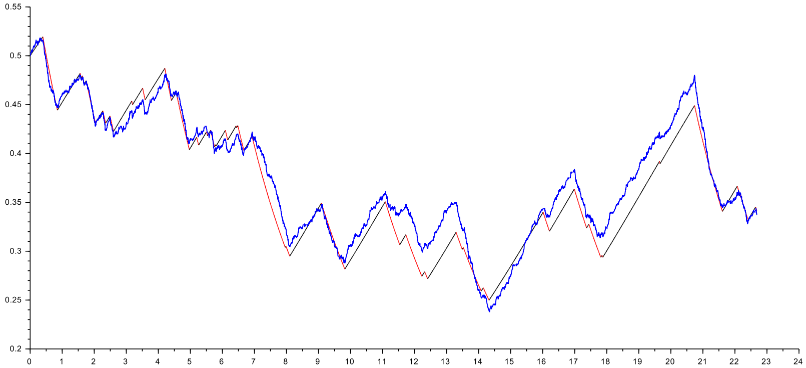


Figure – $K = 1000$

Comparaison des fonctions de répartitions

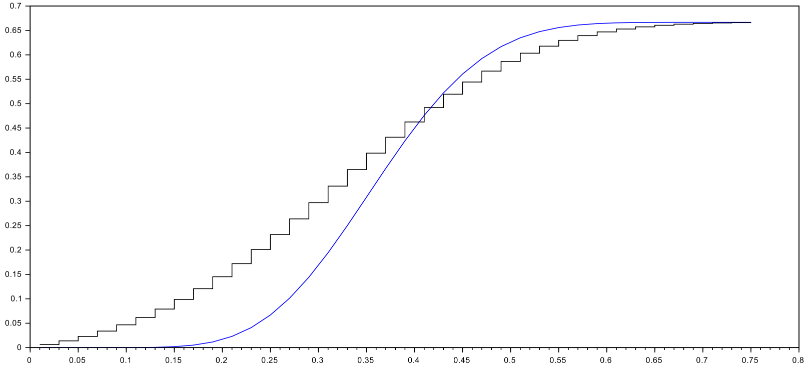


Figure – $\Lambda > 0$, $K = 50$, noir μ^K, bleu μ^*

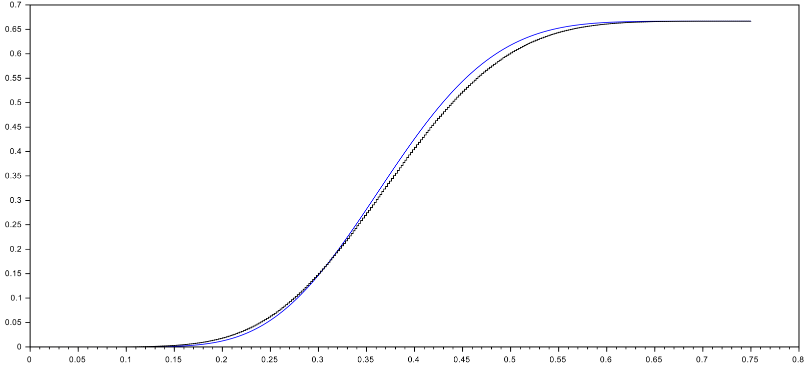


Figure – $\Lambda > 0$, $K = 500$, noir μ^K, bleu μ^*

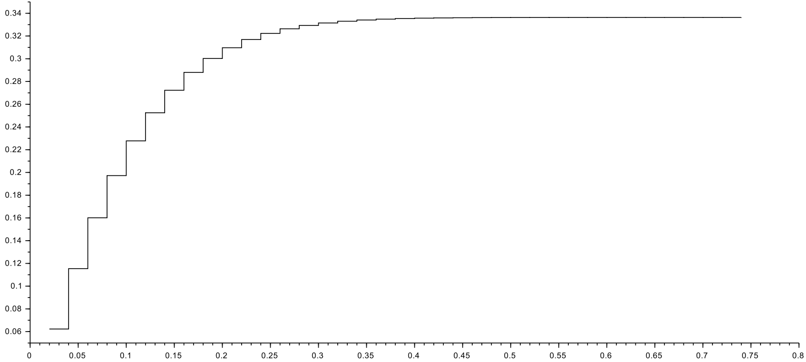


Figure – $\Lambda < 0$, $K = 50$, noir μ^K

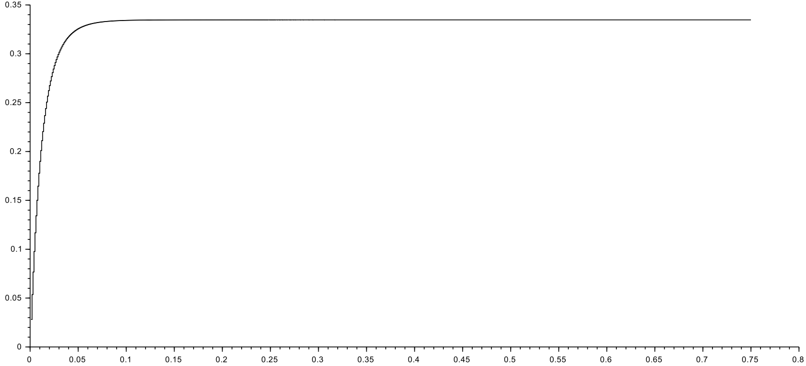


Figure – $\Lambda < 0$, $K = 500$, noir μ^K

Merci pour votre attention !