Théorèmes limites pour des processus de Markov semi-stables

Alain Rouault (UVSQ-Paris-Saclay)
En collaboration avec
N. Demni (Marseille), M. Zani (Orléans) et M-E. Caballero (Mexico)

24 Juin 2021

JP 2021 Guidel

Plan

pssMp

Un processus de Markov positif auto-similaire (pssMp) d'indice $\alpha > 0$, est la donnée d'une famille de probabilités $(\mathbb{Q}_a, a > 0)$ sur l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ sous laquelle le processus canonique X est markovien et vérifie la propriété d'échelle :

$$(\{bX_{b^{-\alpha}t}, t \geqslant 0\}, \mathbb{Q}_a) \stackrel{(d)}{=} (\{X_t, t \geqslant 0\}, \mathbb{Q}_{ba}) \tag{1}$$

pour tous $a, b > 0$.

Exemples : $\alpha = 1$

- carré de Bessel $B_1^2 + \dots B_d^2$
- module d'un processus de Cauchy.

pssMp

Un processus de Markov positif auto-similaire (pssMp) d'indice $\alpha > 0$, est la donnée d'une famille de probabilités $(\mathbb{Q}_a, a > 0)$ sur l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^+)$ sous laquelle le processus canonique X est markovien et vérifie la propriété d'échelle :

$$(\{bX_{b^{-\alpha}t}, t \geqslant 0\}, \mathbb{Q}_a) \stackrel{(d)}{=} (\{X_t, t \geqslant 0\}, \mathbb{Q}_{ba}) \tag{1}$$

pour tous $a, b > 0$.

Exemples : $\alpha = 1$

- carré de Bessel $B_1^2 + \ldots B_d^2$
- module d'un processus de Cauchy.

Plan

Lamperti

Tout pssMp X qui n'atteint jamais 0 peut s'exprimer comme l'exponentielle d'un processus de Lévy ne dérivant pas vers $-\infty$, changé de temps par l' inverse de sa fonctionnelle exponentielle. Formellement, si $(X, (\mathbb{Q}_a)_{a>0})$ est un pssMp d'indice α qui n'atteint jamais 0, on pose

$$T^{(X)}(t) = \int_0^t \frac{ds}{X_s^\alpha}\,,\ (t \geqslant 0) \tag{2}$$

et on note $A^{(X)}$ son inverse, défini par

$$A^{(X)}(t) = \inf\{u \geqslant 0 : T^{(X)}(u) \geqslant t\}\,,\ (t \geqslant 0)\,,$$

Lamperti

Tout pssMp X qui n'atteint jamais 0 peut s'exprimer comme l'exponentielle d'un processus de Lévy ne dérivant pas vers $-\infty$, changé de temps par l' inverse de sa fonctionnelle exponentielle. Formellement, si $(X, (\mathbb{Q}_a)_{a>0})$ est un pssMp d'indice α qui n'atteint jamais 0, on pose

$$T^{(X)}(t) = \int_0^t \frac{ds}{X_s^\alpha}\ ,\ (t \geqslant 0) \tag{2}$$

et on note $A^{(X)}$ son inverse, défini par

$$A^{(X)}(t) = \inf\{u \geqslant 0 : T^{(X)}(u) \geqslant t\}\ ,\ (t \geqslant 0)\ ,$$

Lamperti

Tout pssMp X qui n'atteint jamais 0 peut s'exprimer comme l'exponentielle d'un processus de Lévy ne dérivant pas vers $-\infty$, changé de temps par l' inverse de sa fonctionnelle exponentielle. Formellement, si $(X, (\mathbb{Q}_a)_{a>0})$ est un pssMp d'indice α qui n'atteint jamais 0, on pose

$$T^{(X)}(t) = \int_0^t \frac{ds}{X_s^\alpha} \ , \ (t \geqslant 0) \tag{2}$$

et on note $A^{(X)}$ son inverse, défini par

$$A^{(X)}(t) = \inf\{u \geqslant 0 : T^{(X)}(u) \geqslant t\} \ , \ (t \geqslant 0) \ ,$$

Soit ξ le processus défini par

$$\xi_t = \log X_{A^{(X)}(t)} - \log X_0 \ , \ (t \geqslant 0) \, .$$

Alors, pour tout $a > 0$, la loi de $(\xi_t, t \geqslant 0)$ sous $\mathbb{Q}_a$ ne dépend pas de a et est la loi d'un processus de Lévy partant de 0. La quantité

$$T^{(X)}(t) = \int_0^t \frac{ds}{X_s^\alpha} \ , \ (t \geqslant 0)$$

s'appelle l'horloge de X.

Soit ξ le processus défini par

$$\xi_t = \log X_{A^{(X)}(t)} - \log X_0 \ , \ (t \geqslant 0) \, .$$

Alors, pour tout $a > 0$, la loi de $(\xi_t, t \geqslant 0)$ sous $\mathbb{Q}_a$ ne dépend pas de a et est la loi d'un processus de Lévy partant de 0. La quantité

$$T^{(X)}(t) = \int_0^t \frac{ds}{X_s^\alpha} \ , \ (t \geqslant 0)$$

s'appelle l'horloge de X.

Soit ξ le processus défini par

$$\xi_t = \log X_{A^{(X)}(t)} - \log X_0 \ , \ (t \geqslant 0) \, .$$

Alors, pour tout $a > 0$, la loi de $(\xi_t, t \geqslant 0)$ sous $\mathbb{Q}_a$ ne dépend pas de a et est la loi d'un processus de Lévy partant de 0. La quantité

$$T^{(X)}(t) = \int_0^t \frac{ds}{X_s^\alpha} \ , \ (t \geqslant 0)$$

s'appelle l'horloge de X.

Réciproquement, soit $(\xi_t, t \geqslant 0)$ un processus de Lévy partant de 0 et ne dérivant pas vers $-\infty$, et soit $\mathbb{P}$ la probabilité sous-jacente.
Fixons $\alpha > 0$. Soit

$$\mathcal{A}^{(\xi)}(t) = \int_0^t e^{\alpha \xi_s} ds\,. \tag{3}$$

et $\tau^{(\xi)}$ son processus inverse

$$\tau^{(\xi)}(t) = \inf\{u \geqslant 0 : \mathcal{A}^{(\xi)}(u) \geqslant t\}\,,\ (t \geqslant 0)\,.$$

Pour tout $a > 0$, soit $\mathbb{Q}_a$ la loi sous $\mathbb{P}$ de

$$X_t = a \exp \xi_{\tau^{(\xi)}(t a^{-\alpha})}\,,\ (t \geqslant 0)\,, \tag{4}$$

alors $(X, (\mathbb{Q}_a)_{a>0})$ est un pssMp d'indice α qui n'atteint pas 0 et on a

$$\tau^{(\xi)}(t) = T^{(X)}(t X_0^\alpha)\,.$$

Réciproquement, soit $(\xi_t, t \geqslant 0)$ un processus de Lévy partant de 0 et ne dérivant pas vers $-\infty$, et soit $\mathbb{P}$ la probabilité sous-jacente.
Fixons $\alpha > 0$. Soit

$$\mathcal{A}^{(\xi)}(t) = \int_0^t e^{\alpha \xi_s} ds \,. \tag{3}$$

et $\tau^{(\xi)}$ son processus inverse

$$\tau^{(\xi)}(t) = \inf\{u \geqslant 0 : \mathcal{A}^{(\xi)}(u) \geqslant t\} \,, \ (t \geqslant 0) \,.$$

Pour tout $a > 0$, soit $\mathbb{Q}_a$ la loi sous $\mathbb{P}$ de

$$X_t = a \exp \xi_{\tau^{(\xi)}(t a^{-\alpha})} \,, \ (t \geqslant 0) \,, \tag{4}$$

alors $(X, (\mathbb{Q}_a)_{a>0})$ est un pssMp d'indice α qui n'atteint pas 0 et on a

$$\tau^{(\xi)}(t) = T^{(X)}(t X_0^\alpha) \,.$$

Si la loi de ξ n'est pas arithmétique et si $0 < \mathbb{E}\xi_1 < \infty$, on peut définir $\mathbb{Q}_0$ sous laquelle

$$(bX_{b^{-\alpha}t}, t \geqslant 0) \stackrel{(d)}{=} (X_t, t \geqslant 0)$$

En fait

$$\mathbb{Q}_0 = \lim_{a \downarrow 0} \mathbb{Q}_a$$

(0 est une frontière d'entrée). On a

$$\mathbb{E}_0 f(X_1) = \frac{1}{\alpha \mathbb{E}\xi_1} \mathbb{E}\left[I_\infty^{-1} f\left(I_\infty^{-1/\alpha} \right) \right] . \tag{5}$$

$$\text{avec } \; I_\infty = \int_0^\infty e^{-\xi_s} ds \, . \tag{6}$$

Plan

Ornstein-Uhlenbeck

A un pssMp (X_t) d'indice α, on associe classiquement un processus dit Ornstein-Uhlenbeck (OU) généralisé

$$U(t) = e^{-t/\alpha} X(e^t) \tag{7}$$

Les générateurs de X et U sont reliés par

$$L^U h(x) = L^X h(x) - \frac{x}{\alpha} h'(x) \,. \tag{8}$$

U est strictement stationnaire, Markovien, ergodique sous $\mathbb{Q}_0$, et sa mesure invariante est la loi de X_1 sous $\mathbb{Q}_0$.

Ornstein-Uhlenbeck

A un pssMp (X_t) d'indice α, on associe classiquement un processus dit Ornstein-Uhlenbeck (OU) généralisé

$$U(t) = e^{-t/\alpha} X(e^t) \tag{7}$$

Les générateurs de X et U sont reliés par

$$L^U h(x) = L^X h(x) - \frac{x}{\alpha} h'(x)\,. \tag{8}$$

U est strictement stationnaire, Markovien, ergodique sous $\mathbb{Q}_0$, et sa mesure invariante est la loi de X_1 sous $\mathbb{Q}_0$.

Plan

Soit ψ l'exposant de Laplace de (ξ_t) ; c'est une fonction convexe à valeurs $(-\infty, \infty]$ donnée par

$$\mathbb{E}(\exp m\xi_t) = \exp(t\psi(m)) \quad (m \in \mathbb{R})\,. \tag{9}$$

et dom $\psi := \{m : \psi(m) < \infty\}$ est un intervalle contenant 0. On supposera que

$$\text{int dom } \psi =: (m_-, m_+) \ni 0 \tag{10}$$
$$\mathbb{E}\xi_1 =: \psi'(0) > 0\,. \tag{11}$$

(on sait que ψ est analytique sur (m_-, m_+)). On pose alors

$$m_0 = \inf\{\theta : \psi'(\theta) > 0\} \ , \tau_+ = \frac{1}{\psi'(m_+)}\,,\ \tau_0 = \frac{1}{\psi'(m_0)}\,,$$

où $1/\psi'(\pm\infty) := \lim_{m\to\pm\infty} m/\psi(m)$. On suppose de plus

$$\text{le support de } \xi \text{ n'est pas arithmétique}\,. \tag{12}$$

Plan

Exemples

A) Horloge de Bessel

$$\xi_t = 2B_t + 2\nu t \ \ X_t = \mathrm{BESQ}(2(1+\nu))$$

$$\psi(m) = 2m(m+\nu)\ ,\ I_\infty^{-1} \stackrel{(d)}{=} 2\mathrm{Gamma}(\nu)$$

B) Exemples Poissoniens

1) $\xi_t = dt + \mathrm{Pois}(a,b)_t$

$$\psi(m) = m\left(d + \frac{a}{b-m}\right)\ ,\ I_\infty \stackrel{(d)}{=} a^{-1}\mathrm{Beta}(1+b, a\alpha^{-1})$$

2) $\xi_t = -t + \mathrm{Pois}(a,b)_t$ avec $b < a$

$$\psi(m) = m\left(-1 + \frac{a}{b-m}\right)\ ,\ I_\infty \stackrel{(d)}{=} \mathrm{Beta}_2(1+b, a-b)$$

3) $\xi_t = t - \mathrm{Pois}(a,b)_t$ (dents de scie spectralement négatif)

$$\psi(m) = m\left(1 - \frac{a}{b+m}\right)\ ,\ I_\infty^{-1} \stackrel{(d)}{=} a^{-1}\mathrm{Beta}(b-a, a)$$

Exemples

A) Horloge de Bessel

$$\xi_t = 2B_t + 2\nu t \;\; X_t = \text{BESQ}(2(1+\nu))$$

$$\psi(m) = 2m(m+\nu)\ ,\ I_\infty^{-1} \stackrel{(d)}{=} 2\text{Gamma}(\nu)$$

B) Exemples Poissoniens

1) $\xi_t = dt + \text{Pois}(a, b)_t$

$$\psi(m) = m\left(d + \frac{a}{b-m}\right)\ ,\ I_\infty \stackrel{(d)}{=} a^{-1}\text{Beta}(1+b, a\alpha^{-1})$$

2) $\xi_t = -t + \text{Pois}(a, b)_t$ avec $b < a$

$$\psi(m) = m\left(-1 + \frac{a}{b-m}\right)\ ,\ I_\infty \stackrel{(d)}{=} \text{Beta}_2(1+b, a-b)$$

3) $\xi_t = t - \text{Pois}(a, b)_t$ (dents de scie spectralement négatif)

$$\psi(m) = m\left(1 - \frac{a}{b+m}\right)\ ,\ I_\infty^{-1} \stackrel{(d)}{=} a^{-1}\text{Beta}(b-a, a)$$

Exemples

A) Horloge de Bessel

$$\xi_t = 2B_t + 2\nu t \;\; X_t = \mathrm{BESQ}(2(1+\nu))$$

$$\psi(m) = 2m(m+\nu) \;,\; I_\infty^{-1} \overset{(d)}{=} 2\mathrm{Gamma}(\nu)$$

B) Exemples Poissoniens

1) $\xi_t = dt + \mathrm{Pois}(a, b)_t$

$$\psi(m) = m\left(d + \frac{a}{b-m}\right) \;,\; I_\infty \overset{(d)}{=} a^{-1}\mathrm{Beta}(1+b, a\alpha^{-1})$$

2) $\xi_t = -t + \mathrm{Pois}(a, b)_t$ avec $b < a$

$$\psi(m) = m\left(-1 + \frac{a}{b-m}\right) \;,\; I_\infty \overset{(d)}{=} \mathrm{Beta}_2(1+b, a-b)$$

3) $\xi_t = t - \mathrm{Pois}(a, b)_t$ (dents de scie spectralement négatif)

$$\psi(m) = m\left(1 - \frac{a}{b+m}\right) \;,\; I_\infty^{-1} \overset{(d)}{=} a^{-1}\mathrm{Beta}(b-a, a)$$

C) Processus $X^{\uparrow}$ spectralement négatif conditionné à rester positif.
Soit $\alpha \in (1, 2)$.

$$\psi(m) = \frac{\Gamma(m+\alpha)}{\Gamma(m)}\ ,\ I_\infty \overset{(d)}{=} S_{1/\alpha}(1)$$

D) Processus hypergéométrique stable

$$\psi(m) = -2^{\alpha}\frac{\Gamma((-m+\alpha)/2)}{\Gamma(-m/2)}\frac{\Gamma((m+d)/2)}{\Gamma((m+d-\alpha)/2)}\ ,\ (m \in (-d, \alpha))\,.$$

E) Processus de branchement continu avec immigration (CBPI)

$$\psi(m) = c(\kappa - (\kappa+1)\delta - m)\frac{\Gamma(-m+\kappa)}{\Gamma(-m)}\ ,\ (m \in (-\infty, \kappa))$$

C) Processus $X^{\uparrow}$ spectralement négatif conditionné à rester positif.
Soit $\alpha \in (1, 2)$.

$$\psi(m) = \frac{\Gamma(m+\alpha)}{\Gamma(m)} \ , \ I_\infty \stackrel{(d)}{=} S_{1/\alpha}(1)$$

D) Processus hypergéométrique stable

$$\psi(m) = -2^\alpha \frac{\Gamma((-m+\alpha)/2)}{\Gamma(-m/2)} \frac{\Gamma((m+d)/2)}{\Gamma((m+d-\alpha)/2)} \ , \ (m \in (-d, \alpha)) \, .$$

E) Processus de branchement continu avec immigration (CBPI)

$$\psi(m) = c(\kappa - (\kappa+1)\delta - m) \frac{\Gamma(-m+\kappa)}{\Gamma(-m)} \ , \ (m \in (-\infty, \kappa))$$

C) Processus $X^{\uparrow}$ spectralement négatif conditionné à rester positif.
Soit $\alpha \in (1,2)$.

$$\psi(m) = \frac{\Gamma(m+\alpha)}{\Gamma(m)}\ ,\ I_\infty \stackrel{(d)}{=} S_{1/\alpha}(1)$$

D) Processus hypergéométrique stable

$$\psi(m) = -2^\alpha \frac{\Gamma((-m+\alpha)/2)}{\Gamma(-m/2)} \frac{\Gamma((m+d)/2)}{\Gamma((m+d-\alpha)/2)}\ ,\ (m \in (-d,\alpha))\,.$$

E) Processus de branchement continu avec immigration (CBPI)

$$\psi(m) = c(\kappa - (\kappa+1)\delta - m)\frac{\Gamma(-m+\kappa)}{\Gamma(-m)}\ ,\ (m \in (-\infty,\kappa))$$

Plan

Loi des Grands Nombres

Theorem

Supposons (10) et (12). Quand $t \to \infty$*,*

1) *Pour tout* $a > 0$*,*

$$\frac{1}{\log t} \int_0^t \frac{ds}{X_s^\alpha} \to (\alpha p)^{-1}, \quad \mathbb{Q}_a - \textit{a.s.}$$

2)

$$\frac{1}{\log t} \int_1^t \frac{ds}{X_s^\alpha} \to (\alpha p)^{-1}, \quad \mathbb{Q}_0 - \textit{a.s.}$$

Idée de preuve de 2) : D'après le théorème ergodique on a, pour $f \in L^1(\mu)$:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(U_s)ds = \mu^U(f)\,, \quad \mathbb{Q}_0 - \text{a.s.}$$

puis (définition + changement $e^s = u$, $T = \log t$) $\mathbb{Q}_0 -$ p.s.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(e^{-s/\alpha}X(e^s))ds = \mu^U(f)\,,$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{e^T} f(u^{-1/\alpha}X(u))u^{-1}du = \mu^U(f)$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\log t}\int_1^t f(u^{-1}X(u))u^{-1}du = \mu^U(f)$$

Pour $f(x) = x^{-\alpha}$ on obtient

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\log(t)}\int_1^t \frac{du}{X_u^\alpha} = (\alpha p)^{-1}\ , \quad \mathbb{Q}_0 - \text{a.s.}$$

Plan

Theorem (Caballero-R '20)

1) *Sous $\mathbb{Q}_0$, quand $T \to \infty$,*

$$\left((\log T)^{-1/2} \left(\int_1^{T^t} \frac{dr}{X^\alpha(r)} - \frac{t \log T}{\alpha p} \right); t \geqslant 0 \right) \Rightarrow (\nu W(t); t \geqslant 0) \tag{13}$$

$$p = \psi'(0)\ ,\ \nu^2 = \frac{\sigma^2}{\alpha p^3},\ \sigma^2 = \psi''(0)\,,$$

où $(W_t, t \geqslant 0)$ est un Brownien standard.

2) *Si une des conditions suivantes est vérifiée*
   - 2.1 $\exists m > 0 : \psi(m) < 0$,
   - 2.2 $\exists m > \alpha : \psi(m) > 0$,

   alors pour tout $a > 0$, sous $\mathbb{Q}_a$, quand $T \to \infty$, (13) est vraie.

Idée de preuve.

Theorem (Bhattacharya Th. 2.1)

Soit (Y_t) *un processus stationnaire ergodique de probabilié invariante* π*.*
Si f *est dans l'image* $\hat{A}$ *du générateur étendu de* (Y_t)*,alors, quand* $n \to \infty$

$$\left(n^{-1/2} \int_0^{nt} f(Y_s) ds\right)_{t \geqslant 0} \Rightarrow (\rho W(t))_{t \geqslant 0} \tag{14}$$

où

$$\rho^2 = -2 \int f(x) g(x) \pi(dx) \ , \ \hat{A} g = f \,. \tag{15}$$

Remarques sur les générateurs.

$$L^X h(x) = x^{-\alpha} L^{\xi} (h \circ \exp)(\log x)$$

et si $f_m(x) = x^m$ alors

$$L^X f_m = \psi(m) f_{m-1} \,.$$

Plan

Grandes déviations

On pose

$$m_0 = \inf\{\theta : \psi'(\theta) > 0\} \ , \tau_+ = \frac{1}{\psi'(m_+)} \ , \ \tau_0 = \frac{1}{\psi'(m_0)} \text{ et } \Delta = (\tau_+, \tau_0) \, ,$$

où $1/\psi'(\pm\infty) := \lim_{m\to\pm\infty} m/\psi(m)$.

Theorem (Demni-R-Zani '15)

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in \bar{\Delta}$ on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\log t} \log \mathbb{Q}_a \left(\frac{T^{(X)}(t)}{\log t} \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \right) = -\mathcal{J}(x) \qquad (16)$$

avec

$$\mathcal{J}(x) = \sup_{m\in(m_0,m_+)} \{m - x\psi(m)\} = x\hat{\psi}(1/x) \, . \qquad (17)$$

La fonction $\mathcal{J}$ est positive, convexe et atteint son minimum 0 en $1/\psi'(0) = 1/p == 1/\mathbb{E}\xi_1$.

Grandes déviations

On pose

$$m_0 = \inf\{\theta : \psi'(\theta) > 0\} \ , \tau_+ = \frac{1}{\psi'(m_+)} \ , \ \tau_0 = \frac{1}{\psi'(m_0)} \text{ et } \Delta = (\tau_+, \tau_0) \, ,$$

où $1/\psi'(\pm\infty) := \lim_{m\to\pm\infty} m/\psi(m)$.

Theorem (Demni-R-Zani '15)

Soit $a > 0$. *Pour tout* $x \in \bar{\Delta}$ *on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\log t} \log \mathbb{Q}_a \left(\frac{T^{(X)}(t)}{\log t} \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \right) = -\mathcal{J}(x) \tag{16}$$

avec

$$\mathcal{J}(x) = \sup_{m \in (m_0, m_+)} \{m - x\psi(m)\} = x\hat{\psi}(1/x) \, . \tag{17}$$

La fonction $\mathcal{J}$ est positive, convexe et atteint son minimum 0 en $1/\psi'(0) = 1/p == 1/\mathbb{E}\xi_1$.

Idée de preuve : Méthode de Gartner-Ellis.

Lemma

Pour $\theta \in (-\psi(m_+), -\psi(m_0))$, *quand* $t \to \infty$ *on a*

$$\frac{1}{\log t} \log \mathbb{E}_a \exp(\theta T^{(X)}(t)) \to L(\theta) \tag{18}$$

où

$$L(\theta) = -m \Longleftrightarrow \theta = -\psi(m)\,. \tag{19}$$

Idée de preuve du lemme : processus auxiliaire via Girsanov.
Pour $m \in (m_-, m_+)$ soit

$$\psi_m(\theta) = \psi(m+\theta) - \psi(m)\,,$$

et soit $\{(\xi_t, t \geqslant 0); \mathbb{P}^m\}$ un processus de Lévy partant de 0 d'exposant ψ_m (transformé d'Esscher). Finallement soit $\{(X_t, t \geqslant 0); (\mathbb{Q}_a^m)_{a>0}\}$ le pssMp associé.

D'après la remarque sur les générateurs, on a

$$\mathbb{Q}_a^m|_{\mathcal{F}_t} = \left(\frac{X_t}{a}\right)^m \exp\left(-\psi(m)\int_0^t \frac{ds}{X_s}\right) . \mathbb{Q}_a|_{\mathcal{F}_t} \ , \ (t \geqslant 0) . \qquad (20)$$

d'où

$$\mathbb{E}_a \exp\left(-\psi(m)\int_0^t \frac{ds}{X_s}\right) = a^m \mathbb{E}_a^m[(X_t)^{-m}] \qquad (21)$$

et, vu la propriété d'échelle

$$\mathbb{E}_a \exp\left(-\psi(m)\int_0^t \frac{ds}{X_s}\right) = a^m t^{-m} \mathbb{E}_{a/t}^m[(X_1)^{-m}] . \qquad (22)$$

Merci pour votre attention!

Bibliographie

- Large deviations for clocks of self-similar processes (with N. Demni and M. Zani) Sḿinaire de Probabilités XLVII Special Volume Marc Yor Lecture Notes in Math. 2137 (2015)
- Invariance principle for clocks (with Maria Emilia Caballero) arxiv (2020) to appear in "Séminaire de Probabilités" vol. LI