Asymptotique du nombre de zéros réels de polynômes trigonométriques aléatoires à coefficients dépendants

Journées des Probabilités 2021

Thibault Pautrel

Université Rennes 1- IRMAR

basé sur des travaux en collaboration avec J. Angst et G.Poly

Sommaire

1. Introduction
2. Mesure spectrale purement atomique
3. Asymptotique en moyenne et p.s
   - Asymptotique en moyenne pour une densité spectrale qui s'annule
   - Asymptotique p.s. et en moyenne
4. Signaux périodiques génériques
5. Perspectives

Introduction

Soient $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ deux suites de v.a. centrées de variance unitaire définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On considère

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \quad t \in [0, 2\pi],$$

Soient $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ deux suites de v.a. centrées de variance unitaire définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On considère

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \quad t \in [0, 2\pi],$$

et plus généralement les signaux 2π-périodiques

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(kt), \quad t \in [0, 2\pi],$$

où f est une fonction continue, 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Soient $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ deux suites de v.a. centrées de variance unitaire définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On considère

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \quad t \in [0, 2\pi],$$

et plus généralement les signaux 2π-périodiques

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(kt), \quad t \in [0, 2\pi],$$

où f est une fonction continue, 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Objet d'intérêt: nombre de zéros (aléatoires) de telles fonctions. On note

$$\mathcal{N}(f, I) := \{t \in I, f(t) = 0\}.$$

On cherche à l'étudier l'asymptotique quand $n \to +\infty$ de $\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])$ (resp. $\mathcal{N}(S_n, [0, 2\pi])$), en moyenne et/ou $\mathbb{P}$-p.s.

Phénomène d'universalité

TCL "classique": si $a_1, \ldots, a_n$ sont i.i.d. centrés de variance unitaire,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \Rightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

On cherche à savoir si l'asymptotique du nombre de zéros de f_n est universelle, i.e. ne dépend pas de l'aléa des coefficients a_k et b_k et correspond à la limite obtenue dans le cas gaussien. On étudiera:

- Q.1 la dépendance par rapport à la loi des coefficients $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$,
- Q.2 l'influence de la fonction de corrélation
- Q.3 les fonctions des base cos et sin v.s. f.

Phénomène d'universalité

Pour **Q.1**, Flasche (2017) prouve que pour $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ suite de v.a. i.i.d. centrés de variance unitaire, on a universalité globale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\mathcal{N}(f_n^{(G)}, [0, 2\pi])}{n}.$$

Phénomène d'universalité

Pour **Q.1**, Flasche (2017) prouve que pour $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ suite de v.a. i.i.d. centrés de variance unitaire, on a universalité globale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\mathcal{N}(f_n^{(G)},[0,2\pi])}{n}.$$

Cependant, la variance ne vérifie pas une telle propriété car (Bally, Caramelino, Poly -2018):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Var}(\mathcal{N}(F_n,[0,2\pi]))}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Var}(\mathcal{N}(F_n^{(G)},[0,2\pi]))}{n} + \frac{2}{15}\mathbb{E}[a_1^4-3].$$

Rappels sur la corrélation et mesure spectrale associée

Traitons désormais de la question **Q.2**, i.e. le lien entre nombre de zéros et dépendance des coefficients aléatoires.

On suppose dorénavant les a_k et b_k Gaussiens stationnaire centrés de variance unitaire de fonction de corrélation

$$\rho(|k-\ell|) := \mathbb{E}[a_k a_\ell] = \mathbb{E}[b_k b_\ell] \in [0,1],$$

avec $\mathbb{E}[a_k b_\ell] = 0$.

On peut lui associer de manière unique par le théorème de Bochner–Herglotz une mesure finie μ_ρ telle que, comme $\rho \in \mathbb{R}$ et $\rho(0) = 1$, on a μ_ρ mesure de probabilité symétrique sur $[-\pi, \pi]$ vérifiant

$$\rho(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \mu_\rho(dx).$$

Rappels sur la corrélation et mesure spectrale associée

Traitons désormais de la question **Q.2**, i.e. le lien entre nombre de zéros et dépendance des coefficients aléatoires.

On suppose dorénavant les a_k et b_k Gaussiens stationnaire centrés de variance unitaire de fonction de corrélation

$$\rho(|k-\ell|) := \mathbb{E}[a_k a_\ell] = \mathbb{E}[b_k b_\ell] \in [0,1],$$

avec $\mathbb{E}[a_k b_\ell] = 0$.

On peut lui associer de manière unique par le théorème de Bochner–Herglotz une mesure finie μ_ρ telle que, comme $\rho \in \mathbb{R}$ et $\rho(0) = 1$, on a μ_ρ mesure de probabilité symétrique sur $[-\pi,\pi]$ vérifiant

$$\rho(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \mu_\rho(dx).$$

Si $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ est à densité, on a

$$\psi_\rho(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho(|k|) e^{ikx}.$$

- Sambandham et Reganathan (80'): si a_k corrélés via $\rho(k) = \rho \in (0,1)$ ou $\rho(k) = \rho_0^k$: asymptotique $2/\sqrt{3}$.
- Angst, Dalmao, Poly (2017): a_k, b_k corrélés avec $\rho \iff \psi_\rho$ telle que $\psi_\rho \in L^1([0,2\pi]), \psi_\rho \in \mathcal{C}^0((0,2\pi))$ et $\gamma_\rho := \inf_{t\in[0,2\pi]} \psi_\rho(t) > 0$. Asymptotique $2/\sqrt{3}$. Cas incrément MBF traité.

Exemple: Mouvement Brownien Fractionnaire

MBF: $(X_t)_{t\geq 0}$ tel que $X_0 = 0$ et il existe $H \in (0,1)$ tel que pour tout $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{E}(X_t - X_s)^2 = |t-s|^{2H}.$$

On prend alors

$$a_0 = X_1, \; a_1 = X_2 - X_1, \ldots, a_n = X_{n+1} - X_n.$$

Si $H = 1/2$ (MB) dont les incréments sont indépendants. Sinon:

$$\rho_H(k) = \frac{1}{2}\left(|1+k|^{2H} + |1-k|^{2H} - 2|k|^{2H}\right)$$

$$\iff \quad \psi_H(x) := 2\sin(\pi H)\Gamma(2H+1)(1-\cos(x)) \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2\pi j + x)^{2H+1}}.$$

On a indépendance asymptotique:

$$\lim_{k\to+\infty} \rho_H(x) = 0.$$

Exemple: Mouvement Brownien Fractionnaire

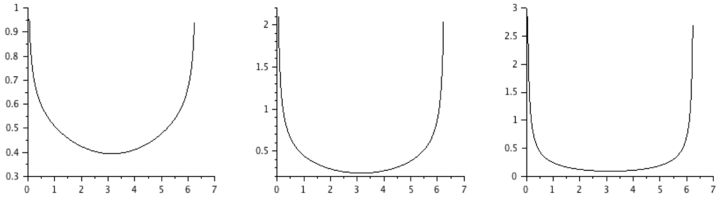

Figure 1: The graph of the function ψ_{ρ_H} on $]0, 2\pi[$ for $H = 0.6$, $H = 0.75$, $H = 0.9$.

Formules de Kac-Rice

Définition

On dit que $f \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2])$ est non-dégénérée sur $[t_1, t_2]$ si $f(t_1) \neq f(t_2) \neq 0$ et $\inf_{t \in [t_1, t_2]} |f(t)| + |f'(t)| > 0$.

Formule de Kac

$$\mathcal{N}(f, [t_1, t_2]) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_{t_1}^{t_2} 1_{|f(t)|<\delta} |f'(t)| dt.$$

Formules de Kac-Rice

Définition

On dit que $f \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2])$ est non-dégénérée sur $[t_1, t_2]$ si $f(t_1) \neq f(t_2) \neq 0$ et $\inf_{t \in [t_1, t_2]} |f(t)| + |f'(t)| > 0$.

Formule de Kac

$$\mathcal{N}(f, [t_1, t_2]) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_{t_1}^{t_2} 1_{|f(t)|<\delta} |f'(t)| dt.$$

Cella reste vrai si f est polygonale.

Formules de Kac-Rice

Définition

On dit que $f \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2])$ est non-dégénérée sur $[t_1, t_2]$ si $f(t_1) \neq f(t_2) \neq 0$ et $\inf_{t \in [t_1, t_2]} |f(t)| + |f'(t)| > 0$.

Formule de Kac

$$\mathcal{N}(f, [t_1, t_2]) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_{t_1}^{t_2} 1_{|f(t)| < \delta} |f'(t)| dt.$$

Cella reste vrai si f est polygonale.

Proposition [Angst, Poly, 2019

Soit $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{-\infty} F = -1$, $\lim_{+\infty} F = 1$, alors

$$\mathcal{N}(f, [0, 2\pi]) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} F' \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right) \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' dx.$$

Formule de Kac-Rice

De la formule de Kac déterministe, on peut en déduire dans le cas des processus Gaussiens, une expression du nombre moyen de zéros.

Théorème

Soit I un intervalle réel et $X = (X_t)_{t\in I}$ un processus Gaussien à trajectoires $\mathcal{C}^1$. On suppose que la loi de X_t est non-dégénérée pour tout $t \in I$. Alors,

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(X, I)\right] = \int_I \mathbb{E}\left[|X_t'| \mid X_t = 0\right] p_{X_t}(0) dt.$$

Le cadre Gaussien permet d'expliciter l'espérance conditionnelle.

Corollaire

Sous le modèle Gaussien stationnaire, pour $I \subset [0, 2\pi]$:

$$\mathbb{E}\mathcal{N}(f_n, I) = \frac{1}{\pi}\int_I \sqrt{\frac{\mathbb{E}[f_n'(t)^2]}{\mathbb{E}[f_n(t)^2]} - \left(\frac{\mathbb{E}[f_n(t)f_n'(t)]}{\mathbb{E}[f_n(t)^2]}\right)^2} dt.$$

Intérêt: calculs explicites dans le cadre Gaussien stationnaire.

Retour sur le cas Gaussien indépendant

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

avec $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ tels que $\mathbb{E}[a_k a_\ell] = \mathbb{E}[b_k b_\ell] = \mathbb{E}[a_k b_\ell] = 0$.

Proposition

Quand $n \to +\infty$, on a

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right] \sim \frac{2}{\sqrt{3}} n$$

En effet, dans la formule de Kac-Rice précédente,
$\mathbb{E}[f_n(x)^2] = n$, $\mathbb{E}[f_n'(x)^2] = \sum_{k=1}^n k^2$ et $\mathbb{E}[f_n(t) f_n'(t)] = 0$. Ainsi

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}} dt \sim \frac{2}{\sqrt{3}} n.$$

Cas général

On a

$$\mathbb{E}\mathcal{N}(f_n, I) = \frac{1}{\pi}\int_I \sqrt{\frac{\mathbb{E}[f_n'(t)^2]}{\mathbb{E}[f_n(t)^2]} - \left(\frac{\mathbb{E}[f_n(t)f_n'(t)]}{\mathbb{E}[f_n(t)^2]}\right)^2}\, dt.$$

Si μ_ρ désigne la mesure spectrale des coefficients $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f_n^2(x)\right] &= \frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n} \mathbb{E}\left[a_k a_l\right]\cos(kx)\cos(lx) + \mathbb{E}\left[b_k b_l\right]\sin(kx)\sin(lx) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n} \rho(k-l)\cos((k-l)x) = \sum_{r=-n}^{n}\left(1-\frac{|r|}{n}\right)\rho(r)e^{irx} \\ &= K_n * \mu_\rho(x),\end{aligned} \tag{1}$$

où K_n est le noyau de Fejér donné par

$$K_n(x) := \sum_{r=-n}^{n}\left(1-\frac{|r|}{n}\right)e^{irx} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2.$$

Cas général

On montre ainsi que

$$\mathbb{E}[f_n(t)^2] = K_n * \mu(t), \ \mathbb{E}[f_n(t)f_n'(t)] = \frac{1}{2}K_n' * \mu(t), \ \mathbb{E}[f_n'(t)^2] = \frac{1}{\alpha_n} L_n * \mu(t),$$

où

$$K_n(x) := \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$$

est le noyau de Fejér d'ordre n, de sorte que

$$K_n'(x) := \frac{2}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)\left(\frac{n\cos(nx/2)}{2\sin(x/2)} - \frac{\sin(nx/2)\cos(x/2)}{2\sin(x/2)^2}\right),$$

et enfin

$$L_n(x) := \frac{\alpha_n}{n}\left|\sum_{k=0}^{n} k e^{ikx}\right|^2 = \frac{\alpha_n}{n}\frac{(n+1)^2}{4\sin^2(x/2)}\left|1 - \frac{(1-e^{i(n+1)x})e^{-inx}}{(n+1)(1-e^{ix})}\right|^2,$$

où la constante de renormalisation α_n est donnée par

$$\alpha_n := 6/(n+1)(2n+1).$$

Etude préliminaire des noyaux trigonométriques

Si $\mu_\rho = \mu_\rho^s + \psi_\rho(x)dx$, on a les limites de type Fejér-Lebesgue suivantes.

Lemme

Pour presque-tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\lim_{n \to +\infty} K_n * \mu_\rho(x) = \psi_\rho(x), \quad \lim_{n \to +\infty} L_n * \mu_\rho(x) = \psi_\rho(x),$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{K_n' * \mu_\rho(x)}{n} = 0.$$

Et quand μ_ρ est discrète?

Etude préliminaire des noyaux trigonométriques

Quand $\mu_\rho^s = 0$, on peut préciser la vitesse sous des hypothèses de régularité de ψ_ρ.

- Si $\psi \in \mathcal{C}^1$ avec dérivée α-Hölder, $\alpha > 0$, on a uniformément en x:

$$K_n * \psi_\rho(x) - \psi_\rho(x) = O(1/n) \ , \quad L_n * \psi_\rho(x) - \psi_\rho(x) = O(1/n).$$

- S'il existe $\alpha \in (0,1]$ tel que pour tout $\delta > 0$,

$$\sup_{|h| \leq \delta} \|\psi_\rho(\cdot + h) + \psi_\rho(\cdot - h) - 2\psi_\rho(\cdot)\|_{L^1([0,2\pi])} = O(\delta^\alpha),$$

  on a

$$\|K_n * \psi_\rho - \psi_\rho\|_{L^1([0,2\pi])} = O(n^{-\alpha/2}).$$

Mesure spectrale purement atomique

Résultats principaux

On considère

$$f_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt),$$

où $(a_k)_k \perp (b_k)_k$ Gaussiens stationnaires de corrélation

$$\rho(k) = \cos(k\alpha) \iff \mu_\rho(x) = \frac{1}{2}(\delta_\alpha + \delta_{-\alpha}).$$

Résultats principaux

On considère

$$f_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt),$$

où $(a_k)_k \perp (b_k)_k$ Gaussiens stationnaires de corrélation

$$\rho(k) = \cos(k\alpha) \iff \mu_\rho(x) = \frac{1}{2}(\delta_\alpha + \delta_{-\alpha}).$$

Asymptotique de $\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right]$ selon que $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$ ou $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$.

Résultats principaux

On considère

$$f_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt),$$

où $(a_k)_k \perp (b_k)_k$ Gaussiens stationnaires de corrélation

$$\rho(k) = \cos(k\alpha) \iff \mu_\rho(x) = \frac{1}{2}(\delta_\alpha + \delta_{-\alpha}).$$

Asymptotique de $\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right]$ selon que $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$ ou $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$.

On montre que la quantité précédente ne converge pas et admet un continuum de valeurs possibles,

$$\mathrm{Adh}\left(\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} \mid n \geq 1\right) = [\sqrt{2}, 2] \not\ni \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Cas $\alpha = 0$

Cela correspond à $\rho \equiv 1 \iff \mu = \delta_0$.

Proposition

Supposons $\mu = \delta_0$. Alors presque-sûrement, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi]) = 2n.$$

Cas $\alpha = 0$

Cela correspond à $\rho \equiv 1 \iff \mu = \delta_0$.

Proposition

Supposons $\mu = \delta_0$. Alors presque-sûrement, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi]) = 2n.$$

En effet, si $A \perp B$ sont deux v.a. Gaussiennes standards,

$$f_n(t) = 0 \iff \underbrace{\left(A \cos\left(\frac{n+1}{2} t\right) + B \sin\left(\frac{n+1}{2} t\right)\right)}_{n+1 \text{ zéros aléatoires}} \overbrace{\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}}^{n-1 \text{ zéros déterministes}} = 0.$$

Fonction auxiliaire ℓ^α

Introduisons la fonction

$$\ell^\alpha(x) := \frac{1}{4\pi^2}\int_{[0,2\pi]^2}\sqrt{1+|g^\alpha_{n\alpha}(s,u)|^2}dsdu,$$

où

$$g^\alpha_x(s,u) := \frac{\sin(x)\sin\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{u+x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)}.$$

Fonction auxiliaire ℓ^α

Introduisons la fonction

$$\ell^\alpha(x) := \frac{1}{4\pi^2}\int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1+|g_{n\alpha}^\alpha(s,u)|^2}\,dsdu,$$

où

$$g_x^\alpha(s,u) := \frac{\sin(x)\sin\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{u+x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)}.$$

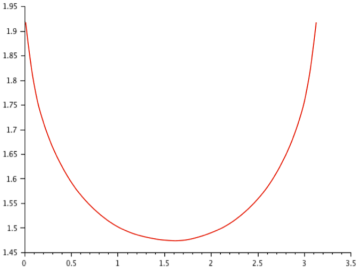

Figure 1: Graph of $\ell^{1/2}(x)$

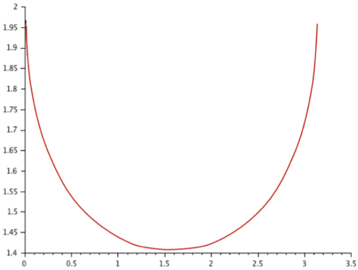

Figure 2: Graph of $\ell(x)$

Fonction auxiliaire ℓ^α

On peut montrer que :

- sur tout compact $K \subset (0,\pi)$, la fonction $\ell^\alpha : K \to \mathbb{R}^+$ donnée par

$$x \mapsto \ell^\alpha(x) := \frac{1}{4\pi^2} \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + |g_x^\alpha(s,u)|^2} ds du$$

  est continue.

Fonction auxiliaire ℓ^α

On peut montrer que :

- sur tout compact $K \subset (0,\pi)$, la fonction $\ell^\alpha : K \to \mathbb{R}^+$ donnée par

$$x \mapsto \ell^\alpha(x) := \frac{1}{4\pi^2} \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + |g_x^\alpha(s,u)|^2} dsdu$$

  est continue.

- le comportement au voisinage de zéro de ℓ^α en α se prolonge naturellement de manière continue, i.e.

$$\forall x \in (0,\pi), \quad \lim_{\alpha\to 0} \ell^\alpha(x) = \ell^0(x).$$

Fonction auxiliaire ℓ^α

On peut montrer que :

- sur tout compact $K \subset (0, \pi)$, la fonction $\ell^\alpha : K \to \mathbb{R}^+$ donnée par

$$x \mapsto \ell^\alpha(x) := \frac{1}{4\pi^2} \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + |g_x^\alpha(s, u)|^2} dsdu$$

  est continue.

- le comportement au voisinage de zéro de ℓ^α en α se prolonge naturellement de manière continue, i.e.

$$\forall x \in (0, \pi), \quad \lim_{\alpha \to 0} \ell^\alpha(x) = \ell^0(x).$$

- $x \mapsto \ell^0(x)$ est analytique sur $(0, \pi)$ et admet $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie. De plus, $[\sqrt{2}, 2) \subseteq \ell^0[(0, \pi)]$.

Cas $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$

La suite $(n\alpha \mod \pi)_{n\geq 1}$ prend ses valeurs dans un ensemble fini S et on a alors le résultat suivant.

Proposition

- Si $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n} - 2 \right| 1_{n\alpha\in\pi\mathbb{Z}} = 0.$$

- Si $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$, alors pour tout $x \in S \setminus \{0\}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n} - \ell^a(x) \right| 1_{n\alpha=x \mod \pi} = 0.$$

En particulier, $\frac{1}{n}\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])$ ne converge pas quand n tend vers l'infini.

Cas $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$

Théorème

Pour tout $0 < \beta < 1$ et pour tout $n \geq 1$ assez grand tel que $n\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, on a

$$\left| \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} - \ell^a(n\alpha \mod \pi) \right| = O\left(\frac{1}{n^\beta (1 - |\cos(n\alpha)|)^2} \right) + o(1).$$

Comme $\mathrm{Adh}\,(n\alpha \mod \pi \mid n \geq 1) = [0, \pi]$ est dense dans $[0, \pi]$, on a

Cas $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$

Théorème

Pour tout $0 < \beta < 1$ et pour tout $n \geq 1$ assez grand tel que $n\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, on a

$$\left| \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} - \ell^a(n\alpha \mod \pi) \right| = O\left(\frac{1}{n^\beta (1 - |\cos(n\alpha)|)^2} \right) + o(1).$$

Comme $\mathrm{Adh}\,(n\alpha \mod \pi \mid n \geq 1) = [0, \pi]$ est dense dans $[0, \pi]$, on a

Corollaire

Soit $x \in (0, \pi)$ et soit $(\varphi(n))_{n \geq 1}$ une sous-suite croissante telle que $\varphi(n)\alpha$ converge vers x quand n tend vers l'infini. Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_{\varphi(n)}, [0, 2\pi])]}{\varphi(n)} - \ell^a(x) \right| = 0.$$

Cas $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$

Les propriétés de ℓ^a permettent d'établir le corollaire suivant.

Corollaire

Pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $\ell \in (\sqrt{2}, 2]$, il existe $\alpha = \alpha(\ell) \geq 0$ suffisamment petit et une infinité d'entiers n tels que

$$\left| \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} - \ell \right| \leq \epsilon.$$

Stratégie

Comme μ est $\mu = \frac{1}{2}(\delta_\alpha + \delta_{-\alpha})$, on a

$$\mathbb{E}[f_n(t)^2] = \frac{1}{2}(K_n(t-\alpha) + K_n(t+\alpha)), \mathbb{E}[f_n(t)f_n'(t)] = \frac{1}{4}(K_n'(t-\alpha) + K_n'(t+\alpha)),$$

$$\text{et } \mathbb{E}[f_n'(t)^2] = \frac{1}{2}(L_n'(t-\alpha) + L_n'(t+\alpha)).$$

Sous l'hypothèse $n\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, la loi de la variable Gaussienne $f_n(t)$ est alors non-dégénérée pour tout $t \in [0, 2\pi]$. On peut utiliser la formule de Kac-Rice pour calculer l'espérance de $\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])$ via

Stratégie

Comme μ est $\mu = \frac{1}{2}(\delta_\alpha + \delta_{-\alpha})$, on a

$$\mathbb{E}[f_n(t)^2] = \frac{1}{2}(K_n(t-\alpha)+K_n(t+\alpha)), \mathbb{E}[f_n(t)f_n'(t)] = \frac{1}{4}(K_n'(t-\alpha)+K_n'(t+\alpha)),$$

$$\text{et } \mathbb{E}[f_n'(t)^2] = \frac{1}{2}(L_n'(t-\alpha)+L_n'(t+\alpha)).$$

Sous l'hypothèse $n\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, la loi de la variable Gaussienne $f_n(t)$ est alors non-dégénérée pour tout $t \in [0, 2\pi]$. On peut utiliser la formule de Kac-Rice pour calculer l'espérance de $\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])$ via

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])] = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{I_n(t)}dt,$$

avec

$$I_n(t) := \frac{1}{\alpha_n}\frac{L_n(t-\alpha)+L_n(t+\alpha)}{K_n(t-\alpha)+K_n(t+\alpha)} - \frac{1}{4}\left(\frac{K_n'(t-\alpha)+K_n'(t+\alpha)}{K_n(t-\alpha)+K_n(t+\alpha)}\right)^2.$$

Plan de la preuve du théorème

Le calcul de l'intégrale précédente se sépare en deux parties, selon que la variable d'intégration t soit proche des atomes $\pm\alpha$ ou non.

$\star$ Si t est loin des atomes:

Soit $\epsilon > 0$ et soit $J_\epsilon := \left\{ t \in [0, 2\pi], \left| \sin\left(\frac{t\pm\alpha}{2}\right)\right| > \epsilon \right\}$. Uniformément sur J_ϵ, on a

$$I_n(t) = \frac{n^2}{4}\left(Q_n(t) + O\left(\frac{1}{n\epsilon^5(1-|\cos(n\alpha)|)} \right) \right),$$

où

$$Q_n(t) = 1 + \left(\frac{\sin(n\alpha)\sin\left(\frac{t-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(n\frac{t-\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{t+\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(n\frac{t+\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{t-\alpha}{2}\right)} \right)^2.$$

Plan de la preuve du théorème

Le calcul de l'intégrale précédente se sépare en deux parties, selon que la variable d'intégration t soit proche des atomes $\pm\alpha$ ou non.

$\star$ Si t est loin des atomes:

Soit $\epsilon > 0$ et soit $J_\epsilon := \left\{t \in [0, 2\pi], \left|\sin\left(\frac{t\pm\alpha}{2}\right)\right| > \epsilon\right\}$. Uniformément sur J_ϵ, on a

$$I_n(t) = \frac{n^2}{4}\left(Q_n(t) + O\left(\frac{1}{n\epsilon^5(1-|\cos(n\alpha)|)}\right)\right),$$

où

$$Q_n(t) = 1 + \left(\frac{\sin(n\alpha)\sin\left(\frac{t-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(n\frac{t-\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{t+\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(n\frac{t+\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{t-\alpha}{2}\right)}\right)^2.$$

En particulier on a

$$\frac{2}{n}\int_{J_\epsilon}\sqrt{I_n(t)}dt = \int_{J_\epsilon}\sqrt{Q_n(t)}dt + O\left(\frac{1}{n\epsilon^5(1-|\cos(n\alpha)|)}\right).$$

Plan de la preuve du théorème

Pour $x \in [-\pi, \pi]$, on introduit g_x^α définie sur $[0, 2\pi]^2 \setminus \{\pm(\alpha, x)\}$ par

$$g_x^\alpha(s,u) := \frac{\sin(x)\sin\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{u+x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)}.$$

Plan de la preuve du théorème

Pour $x \in [-\pi, \pi]$, on introduit g_x^α définie sur $[0, 2\pi]^2 \setminus \{\pm(\alpha, x)\}$ par

$$g_x^\alpha(s,u) := \frac{\sin(x)\sin\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{u+x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)}.$$

La fonction $u \mapsto g_x^\alpha(s,u)$ est 2π-périodique et on a

$$Q_n(t) = 1 + |g_{n\alpha}^\alpha(t, nt)|^2.$$

La fonction $(u,s) \mapsto g_x^\alpha(s,u)$ possède des singularités en $(s,u) = \pm(\alpha, x)$ qui sont intégrables au sens suivant.

Plan de la preuve du théorème

Pour $x \in [-\pi, \pi]$, on introduit g_x^α définie sur $[0, 2\pi]^2 \setminus \{\pm(\alpha, x)\}$ par

$$g_x^\alpha(s,u) := \frac{\sin(x)\sin\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s+\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{u+x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)}.$$

La fonction $u \mapsto g_x^\alpha(s,u)$ est 2π-périodique et on a

$$Q_n(t) = 1 + |g_{n\alpha}^\alpha(t, nt)|^2.$$

La fonction $(u,s) \mapsto g_x^\alpha(s,u)$ possède des singularités en $(s,u) = \pm(\alpha, x)$ qui sont intégrables au sens suivant.

Lemme

Soit $0 < \alpha < \pi$ et $0 < x < \pi$. Pour tout $0 \leq \eta < 1$, on a

$$\int_{[0,2\pi]^2} |g_x^\alpha(s,u)|^{1+\eta} dsdu < +\infty.$$

Plan de la preuve du théorème

Pour établir l'asymptotique recherchée, on commence par borner l'intégrale étudiée par dessus et par dessous, en utilisant des sommes de Riemann. Posons $E_n^k := \left[\frac{2\pi k}{n}, \frac{2\pi(k+1)}{n}\right]$ pour $0 \leq k \leq n-1$. On écrit

Plan de la preuve du théorème

Pour établir l'asymptotique recherchée, on commence par borner l'intégrale étudiée par dessus et par dessous, en utilisant des sommes de Riemann. Posons $E_n^k := \left[\frac{2\pi k}{n}, \frac{2\pi(k+1)}{n}\right]$ pour $0 \leq k \leq n-1$. On écrit

$$\int_{J_\varepsilon} \sqrt{Q_n(t)}dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{J_\varepsilon \cap E_n^k} \sqrt{Q_n(t)}dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \sqrt{Q_n\left(\frac{2\pi k}{n} + \frac{u}{n}\right)} 1_{\frac{2\pi k+u}{n} \in J_\varepsilon} du.$$

et on prouve que

Plan de la preuve du théorème

Pour établir l'asymptotique recherchée, on commence par borner l'intégrale étudiée par dessus et par dessous, en utilisant des sommes de Riemann. Posons $E_n^k := \left[\frac{2\pi k}{n}, \frac{2\pi(k+1)}{n}\right]$ pour $0 \leq k \leq n-1$. On écrit

$$\int_{J_\varepsilon} \sqrt{Q_n(t)}dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{J_\varepsilon \cap E_n^k} \sqrt{Q_n(t)}dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \sqrt{Q_n\left(\frac{2\pi k}{n} + \frac{u}{n}\right)} 1_{\frac{2\pi k+u}{n} \in J_\varepsilon} du.$$

et on prouve que

Lemme

Si $n\epsilon \gg 1$, alors, pour n tendant vers l'infini, on a

$$\int_{J_\epsilon} \sqrt{Q_n(t)}dt \geq \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + |g_{n\alpha}^{\alpha}(s,u)|^2} 1_{s \in J_{2\epsilon}} dsdu + O\left(\frac{1}{n\epsilon^2(1 - |\cos(n\alpha)|)}\right),$$

$$\int_{J_\epsilon} \sqrt{Q_n(t)}dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + |g_{n\alpha}^{\alpha}(s,u)|^2} 1_{s \in J_{\epsilon/2}} dsdu + O\left(\frac{1}{n\epsilon^2(1 - |\cos(n\alpha)|)}\right),$$

Plan de la preuve du théorème

Lemme

Uniformément en $n \geq 1$, pour tout $0 < \eta < 1$, on a

$$\left| \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + |g_{n\alpha}^{\alpha}(s,u)|^2} 1_{s \in J_\epsilon} dsdu - \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + |g_{n\alpha}^{\alpha}(s,u)|^2} dsdu \right| = O\left(\epsilon^{\frac{\eta}{1+\eta}}\right).$$

Plan de la preuve du théorème

Lemme

Uniformément en $n \geq 1$, pour tout $0 < \eta < 1$, on a

$$\left| \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + |g_{n\alpha}^{\alpha}(s,u)|^2} 1_{s \in J_\epsilon} \, dsdu - \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + |g_{n\alpha}^{\alpha}(s,u)|^2} \, dsdu \right| = O\left(\epsilon^{\frac{\eta}{1+\eta}}\right).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\left| \frac{4\pi}{n} \int_{J_\epsilon} \sqrt{I_n(t)} \, dt - \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + g_{n\alpha}^{\alpha}(s,u)^2} \, dsdu \right| &= O\left(\epsilon^{\frac{\eta}{1+\eta}}\right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{n\epsilon^5 (1 - |\cos(n\alpha)|)^2}\right).\end{aligned}$$

Plan de la preuve du théorème

$\star$ Si t est proche des atomes $\pm\alpha$:

Si $\epsilon = \epsilon_n$ est de la forme $\epsilon_n = n^{-\beta}$ avec $0 < \beta < 1/2$, il a été établi par Pirhadi que

$$\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, J_{\epsilon_n}^c)]}{n} = O(\epsilon_n).$$

Plan de la preuve du théorème

$\star$ Si t est proche des atomes $\pm\alpha$:

Si $\epsilon = \epsilon_n$ est de la forme $\epsilon_n = n^{-\beta}$ avec $0 < \beta < 1/2$, il a été établi par Pirhadi que

$$\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, J_{\epsilon_n}^c)]}{n} = O(\epsilon_n).$$

On en déduit que dès que ϵ_n est de la forme $n^{-\beta}$ avec $0 < \beta < 1/5$, on a

$$\left|\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} - \ell^\alpha(n\alpha \mod \pi)\right| = O\left(\epsilon_n^{\frac{\eta}{1+\eta}}\right) + O\left(\frac{1}{n\epsilon_n^5(1 - |\cos(n\alpha)|)^2}\right).$$

Plan de la preuve du théorème

$\star$ Si t est proche des atomes $\pm\alpha$:

Si $\epsilon = \epsilon_n$ est de la forme $\epsilon_n = n^{-\beta}$ avec $0 < \beta < 1/2$, il a été établi par Pirhadi que

$$\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, J^c_{\epsilon_n})]}{n} = O(\epsilon_n).$$

On en déduit que dès que ϵ_n est de la forme $n^{-\beta}$ avec $0 < \beta < 1/5$, on a

$$\left|\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} - \ell^\alpha(n\alpha \mod \pi)\right| = O\left(\epsilon_n^{\frac{\eta}{1+\eta}}\right) + O\left(\frac{1}{n\epsilon_n^5(1 - |\cos(n\alpha)|)^2}\right).$$

Le premier corollaire suit car uniformément en $x \in S \setminus \{0\}$, si $n\alpha \mod \pi = x$, alors $1 - |\cos(n\alpha)| = 1 - |\cos(x)|$ est bornée loin de zéro

Asymptotique en moyenne et p.s

Principaux résultats

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \quad t \in [0, 2\pi]$$

où $(a_k)_k \perp (b_k)_k$ proc. Gaussiens stationnaires centrés de variance 1 et de corrélation ρ associée à μ_ρ non-purement singulière.

- Si $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ avec $\psi_\rho \in \mathcal{C}^{1,\alpha}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{\lambda\{\psi_\rho = 0\}}{\pi\sqrt{2}} + \frac{\lambda\{\psi_\rho \neq 0\}}{\pi\sqrt{3}}.$$

Principaux résultats

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \quad t \in [0, 2\pi]$$

où $(a_k)_k \perp (b_k)_k$ proc. Gaussiens stationnaires centrés de variance 1 et de corrélation ρ associée à μ_ρ non-purement singulière.

- Si $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ avec $\psi_\rho \in \mathcal{C}^{1,\alpha}$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{\lambda\{\psi_\rho = 0\}}{\pi\sqrt{2}} + \frac{\lambda\{\psi_\rho \neq 0\}}{\pi\sqrt{3}}.$$

- Si $\mu_\rho = \mu_\rho^a + \mu_\rho^d$ avec $\log \psi_\rho \in L^{1+\eta}([0, 2\pi]), \eta \in (0, 1)$:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Principaux résultats

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \quad t \in [0, 2\pi]$$

où $(a_k)_k \perp (b_k)_k$ proc. Gaussiens stationnaires centrés de variance 1 et de corrélation ρ associée à μ_ρ non-purement singulière.

- Si $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ avec $\psi_\rho \in \mathcal{C}^{1,\alpha}$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{\lambda\{\psi_\rho = 0\}}{\pi\sqrt{2}} + \frac{\lambda\{\psi_\rho \neq 0\}}{\pi\sqrt{3}}.$$
- Si $\mu_\rho = \mu_\rho^a + \mu_\rho^d$ avec $\log \psi_\rho \in L^{1+\eta}([0, 2\pi]), \eta \in (0, 1)$:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$
- Si $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ avec ψ_ρ vérifiant une condition de Besov et existence de moment négatif:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Non-universalité quand $\lambda\{\psi_\rho = 0\} > 0$.

Théorème de non-universalité

On suppose que $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ est telle que $\psi_\rho \in \mathcal{C}^1$ avec une dérivée Hölder sur un ouvert de mesure de Lebesgue pleine. Alors

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n} \geq \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n} = \frac{\lambda(\{\psi_\rho = 0\})}{\pi\sqrt{2}} + \frac{2\pi - \lambda(\{\psi_\rho = 0\})}{\pi\sqrt{3}}.$$

Non-universalité quand $\lambda\{\psi_\rho = 0\} > 0$.

Théorème de non-universalité

On suppose que $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ est telle que $\psi_\rho \in \mathcal{C}^1$ avec une dérivée Hölder sur un ouvert de mesure de Lebesgue pleine. Alors

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n} \geq \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n} = \frac{\lambda(\{\psi_\rho = 0\})}{\pi\sqrt{2}} + \frac{2\pi - \lambda(\{\psi_\rho = 0\})}{\pi\sqrt{3}}.$$

Ce résultat reste vrai pour les hypothèses suivantes: ψ_ρ continue par morceaux telle que

$$\{\psi_\rho = 0\} = \bigcup_{i=1}^{p}[a_i, b_i] \cup \bigcup_{j=1}^{q}\{c_j\}.$$

Non-universalité quand $\lambda\{\psi_\rho = 0\} > 0$.

Remarques:

1. Si on choisit $\psi_\rho \in \mathcal{C}_c^\infty$ tel que $\operatorname{supp}(\psi_\rho) \subset (0, 2\pi)$, ρ tend arbitrairement vite vers zéro à l'infini et pourtant l'asymptotique du nombre moyen de zéro est non-universelle.

Non-universalité quand $\lambda\{\psi_\rho = 0\} > 0$.

Remarques:

1. Si on choisit $\psi_\rho \in \mathcal{C}_c^\infty$ tel que $\mathrm{supp}(\psi_\rho) \subset (0, 2\pi)$, ρ tend arbitrairement vite vers zéro à l'infini et pourtant l'asymptotique du nombre moyen de zéro est non-universelle.
2. Cependant, il existe des fonctions de corrélations ρ qui tendent arbitrairement vite vers zéro pour lesquelles l'asymptotique en moyenne est universelle.

Non-universalité quand $\lambda\{\psi_\rho = 0\} > 0$.

Corollaire

Pour tout $\ell \in \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}\right)$, il existe une densité spectrale ψ_ρ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n} = \ell.$$

Preuve On prend $\psi_\rho(x) = \frac{1}{2a}1_{[-a,a]}(x) \iff \rho(k) = \sin(ka)/ka$. Alors par la formule de Kac-Rice

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n} = \frac{2\pi - 2a}{\pi\sqrt{2}} + \frac{2a}{\pi\sqrt{3}}.$$

Point clé:

Lemme [AP19]

Soit $X \in \mathcal{U}([0, 2\pi])$. Soit f une fonction 2π-périodique ayant un nombre fini de zéros sur une période. Alors pour tout $0 < h < 2\pi$, on a

$$\frac{h}{2\pi} \times \mathcal{N}(f, [0, 2\pi]) = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}(f, [X, X + h]) \right].$$

Point clé:

Lemme [AP19]

Soit $X \in \mathcal{U}([0, 2\pi])$. Soit f une fonction 2π-périodique ayant un nombre fini de zéros sur une période. Alors pour tout $0 < h < 2\pi$, on a

$$\frac{h}{2\pi} \times \mathcal{N}(f, [0, 2\pi]) = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}(f, [X, X + h])\right].$$

En prenant $h = \frac{2\pi}{n}$, on obtient pour $X \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$ indépendante de $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ que

$$\frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}\left(f_n, \left[X, X + \frac{2\pi}{n}\right]\right)\right].$$

On pose alors la suite de processus $\{g_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ définie par

$$g_n(t) := f_n\left(X + \frac{t}{n}\right), \quad t \in [0, 2\pi],$$

de sorte que

$$\frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])\right].$$

Nombre de zéros p.s.: stratégie

1. On montre la convergence pour la topologie $\mathcal{C}^1$ de la suite de processus $\{g_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ vers un processus limite explicite g_∞ non-dégénéré.
2. On en déduit que $\mathbb{P}$-p.s.,
$$\mathcal{N}\left(g_n, [0, 2\pi]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Loi sous } \mathbb{P}_X} \mathcal{N}\left(g_\infty, [0, 2\pi]\right).$$
3. Pour pouvoir prendre l'espérance sous $\mathbb{P}$ (resp. $\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X$) à la limite, on montre une estimée d'équi-intégrabilité du type
$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}_X \mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])^{1+\eta/2} < \infty.$$

Ainsi: $\mathbb{P}$-p.s.,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X[\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])].$$
Comme les zéros de g_∞ sont les mêmes que ceux d'un processus Gaussien stationnaire de corrélation $\sin_c$, on a $\mathbb{P}$-p.s.,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

TCL Salem-Zygmund, cas indépendant

Théorème (Salem-Zygmund, 1954)

Soit $(a_k, b_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. centrées de variance unitaire et possédant un moment d'ordre trois. Soit $X \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$ indépendante des coefficients $(a_k, b_k)_{k\geq 1}$. Alors, $\mathbb{P}$-p.s., sous $\mathbb{P}_X$, on a la convergence en loi suivante:

$$g_n(0) = f_n(X) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1),$$

au sens où

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_X\left[e^{itf_n(X)}\right] = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

TCL Salem-Zygmund, cas dépendant

Soit

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \quad t \in [0, 2\pi],$$

avec $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ centrés, de variables unitaire deux suites indépendantes de mesure spectrale $\mu_\rho(dx) = \mu_\rho^s(dx) + \psi_\rho(x)dx$ avec $\psi_\rho > 0$ p.s.. Soit $X \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$ indépendante des coefficients a_k et b_k.

Théorème

$\mathbb{P}$-p.s., $f_n(X)$ converge en loi sous $\mathbb{P}_X$ vers $\sqrt{2\pi\psi_\rho(X)}N$, où $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ indépendant de X.

Autrement dit, $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_X \left[e^{itf_n(X)}\right] = \mathbb{E}_{X,N}\left[e^{it\sqrt{2\pi\psi_\rho(X)}N}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}\times 2\pi\psi_\rho(x)}dx.$$

TCL Salem-Zygmund, cas dépendant

Remarques:

- Quand $\rho(k) = \delta_0(k) \iff \psi_\rho \equiv 1/2\pi$, on retrouve le TCL Salem-Zygmund indépendant classique.

TCL Salem-Zygmund, cas dépendant

Remarques:

- Quand $\rho(k) = \delta_0(k) \iff \psi_\rho \equiv 1/2\pi$, on retrouve le TCL Salem-Zygmund indépendant classique.
- Quand $\rho(k)$ n'est pas triviale, la loi limite sous $\mathbb{P}_X$ n'est plus Gaussienne mais un mélange Gaussien !

TCL Salem-Zygmund, cas dépendant

Remarques:

- Quand $\rho(k) = \delta_0(k) \iff \psi_\rho \equiv 1/2\pi$, on retrouve le TCL Salem-Zygmund indépendant classique.
- Quand $\rho(k)$ n'est pas triviale, la loi limite sous $\mathbb{P}_X$ n'est plus Gaussienne mais un mélange Gaussien !
- Si $\psi \equiv 0$ (i.e. μ_ρ purement singulière), la limite précédente est nulle $\to$ nécessité d'une autre renormalisation.

Idée de preuve

1. On montre que

$$\Delta_n := \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_n(X)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{-\frac{t^2}{2}2\pi K_n * \mu_\rho(X)}\right]\right|^2\right] \lesssim t^2 n^{-1/6}.$$

Par Borel-Cantelli, on en déduit que $\mathbb{P}$-p.s., quand $n \to +\infty$,

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_{n^7}(X)} - e^{-\frac{t^2}{2}2\pi K_{n^7} * \mu_\rho(X)}\right]\right| \to 0.$$

Idée de preuve

1. On montre que

$$\Delta_n := \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_n(X)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{-\frac{t^2}{2}2\pi K_n * \mu_\rho(X)}\right]\right|^2\right] \lesssim t^2 n^{-1/6}.$$

Par Borel-Cantelli, on en déduit que $\mathbb{P}$-p.s., quand $n \to +\infty$,

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_{n^7}(X)} - e^{-\frac{t^2}{2}2\pi K_{n^7} * \mu_\rho(X)}\right]\right| \to 0.$$

2. Soit $m \geq 1$. Il existe un unique n tel que $n^7 < m \leq (n+1)^7$. Par le théorème de Birkhoff-Khinchine,

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_{n^7}(X)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{itf_m(X)}\right]\right| = O\left(\frac{1}{m^{1/14}}\right).$$

Idée de preuve

1. On montre que

$$\Delta_n := \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_n(X)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{-\frac{t^2}{2}2\pi K_n*\mu_\rho(X)}\right]\right|^2\right] \lesssim t^2 n^{-1/6}.$$

Par Borel-Cantelli, on en déduit que $\mathbb{P}$-p.s., quand $n \to +\infty$,

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_{n^7}(X)} - e^{-\frac{t^2}{2}2\pi K_{n^7}*\mu_\rho(X)}\right]\right| \to 0.$$

2. Soit $m \geq 1$. Il existe un unique n tel que $n^7 < m \leq (n+1)^7$. Par le théorème de Birkhoff-Khinchine,

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_{n^7}(X)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{itf_m(X)}\right]\right| = O\left(\frac{1}{m^{1/14}}\right).$$

3. Par l'inégalité triangulaire, quand $m \to +\infty$, on a $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_m(X)} - e^{-\frac{t^2}{2}2\pi K_m*\mu_\rho(X)}\right]\right| \to 0.$$

On conclut par convergence dominée.

Convergence du processus $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$

On peut généraliser aux marginales fini-dimensionnelles le résultat de convergence précédent.

Proposition

$\mathbb{P}$-p.s., quand $n \to +\infty$, les marginales fini-dimensionnelles de $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ convergent vers celles d'un processus limite $(g_\infty(t))_{t\in[0,2\pi]}$ de la forme $\sqrt{2\pi\psi_\rho(X)}N$, où $N = (N_t)_{t\in[0,2\pi]}$ est le processus Gaussien stationnaire de covariance sinus cardinal et indépendant de X.

Convergence du processus $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$

On peut généraliser aux marginales fini-dimensionnelles le résultat de convergence précédent.

Proposition

$\mathbb{P}$-p.s., quand $n \to +\infty$, les marginales fini-dimensionnelles de $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ convergent vers celles d'un processus limite $(g_\infty(t))_{t\in[0,2\pi]}$ de la forme $\sqrt{2\pi\psi_\rho(X)}N$, où $N = (N_t)_{t\in[0,2\pi]}$ est le processus Gaussien stationnaire de covariance sinus cardinal et indépendant de X.

On montre enfin la tension pour la topologie $\mathcal{C}^1$ pour en déduire la convergence pour la topologie $\mathcal{C}^1$ du processus g_n vers g_∞. Il suffit pour cela d'établir un critère de Lamperti pour $\mathbb{E}_X|g_n(t) - g_n(s)|^2$ et $\mathbb{E}_X|g_n'(t) - g_n'(s)|^2$.

Convergence du processus $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$

En exploitant l'orthogonalité dans $L^2([0,2\pi])$ pour les fonctions cosinus et sinus, on a $\mathbb{P}$-p.s, pour tout $s,t\in[0,2\pi]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_X|g_n(t)-g_n(s)|^2 &= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\sin^2\left(\frac{k}{2n}(t-s)\right)\leq C(\omega)|t-s|^2,\\
\mathbb{E}_X|g_n'(t)-g_n'(s)|^2 &= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}(a_k^2+b_k^2)\sin^2\left(\frac{k}{2n}(t-s)\right)\leq C(\omega)|t-s|^2.
\end{aligned}$$

car par Birkhoff-Khichine,

$$C(\omega):=\sup_{n\geq 1}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

est bornée $\mathbb{P}$-p.s.

Convergence du processus $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$

En exploitant l'orthogonalité dans $L^2([0,2\pi])$ pour les fonctions cosinus et sinus, on a $\mathbb{P}$-p.s, pour tout $s,t\in[0,2\pi]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_X|g_n(t)-g_n(s)|^2 &= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\sin^2\left(\frac{k}{2n}(t-s)\right)\leq C(\omega)|t-s|^2,\\
\mathbb{E}_X|g_n'(t)-g_n'(s)|^2 &= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}(a_k^2+b_k^2)\sin^2\left(\frac{k}{2n}(t-s)\right)\leq C(\omega)|t-s|^2.
\end{aligned}$$

car par Birkhoff-Khichine,

$$C(\omega):=\sup_{n\geq 1}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

est bornée $\mathbb{P}$-p.s.Ainsi on a

Proposition

$\mathbb{P}$-p.s., la famille des lois de $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ sous $\mathbb{P}_X$ est tendue pour la topologie $\mathcal{C}^1([0,2\pi])$.

Convergence du processus $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$

CV des marginales fini-dim + Tension $\mathcal{C}^1$ $\Rightarrow$ CV du processus, plus précisément:

Théorème

$\mathbb{P}$-p.s., le processus $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]} := \left(f_n\left(X + \frac{t}{n}\right)\right)_{t\in[0,2\pi]}$ converge en loi sous $\mathbb{P}_X$ pour la topologie $\mathcal{C}^1$ vers le processus limite $(g_\infty(t))_{t\in[0,2\pi]}$ donné par

$$g_\infty := \sqrt{2\pi\psi_\rho(X)}N,$$

où $N = (N_t)_{t\in[0,2\pi]}$ est le processus Gaussien de covariance sinus cardinal, indépendant de la variable uniforme X.

Continuité du nombre de zéros

On rappelle qu'une fonction f est *non-dégénérée* sur $[0, 2\pi]$ si

$$\inf_{t \in [0,2\pi]} (|f(t)| + |f'(t)|) > 0.$$

Sur de telles fonctions, on a:

Proposition

Soit $(f_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi])^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $f \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi])$ pour la topologie $\mathcal{C}^1$, avec f non-dégénérée sur $[0, 2\pi]$. Alors $\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])$ et $\mathcal{N}(f, [0, 2\pi])$ sont finis pour n assez grand et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi]) = \mathcal{N}(f, [0, 2\pi]).$$

Comme la suite de processus $\{g_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ converge pour la topologie $\mathcal{C}^1$ vers g_∞ non dégénéré, on en déduit

Proposition

1. $\mathbb{P}$-p.s., quand $n \to +\infty$, la variable aléatoire $\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])$ converge en loi sous $\mathbb{P}_X$ vers $\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])$.
2. Quand $n \to +\infty$, $\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])$ converge en loi sous $\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X$ vers $\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])$.

On souhaite montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])\right] = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])\right],$$

$$(\text{resp. } \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi]).$$

On souhaite montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])}{n} = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_X\left[\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])\right] = \mathbb{E}_X\left[\mathcal{N}(g_\infty,[0,2\pi])\right],$$

$$(\text{resp. } \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])}{n} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\mathcal{N}(g_\infty,[0,2\pi]).$$

Aucune condition est imposée ici sur la partie singulière μ_ρ^s de la mesure spectrale. La convergence du processus précédente ne suffit pas pour en déduire la convergence du moment d'ordre 1. On montre alors que l'on a équi-intégrabilité sous $\mathbb{P}_X$ (resp. $\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X$) pour pouvoir conclure à la convergence des espérances.

Proposition

- Pour $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx + \mu_\rho^s$, avec $\psi_\rho > 0$ p.s. Soit $\eta > 0$. Si de plus $\log(\psi_\rho) \in L^{1+\eta}([0, 2\pi])$, alors

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}_{\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X} \left[|\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])|^{1+\eta/2} \right] < +\infty.$$

- Pour $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$, que l'on suppose vérifie

A.1 : Il existe $\alpha \in (0, 1]$ tel que pour tout $\delta > 0$,

$$\sup_{|h| \leq \delta} \|\psi_\rho(\cdot + h) + \psi_\rho(\cdot - h) - 2\psi_\rho(\cdot)\|_{L^1([0,2\pi])} = O(\delta^\alpha).$$

A.2 : Il existe $\gamma > 0$ tel que $\psi_\rho^{-\gamma} \in L^1([0, 2\pi])$.

Alors on a une condition d'équi-intégrabilité sous $\mathbb{P}_X$:

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}_X \left[|\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])|^{1+\eta/2} \right] < +\infty.$$

Nombre de zéros p.s.

On suppose dans la suite que

Théorème

Sous les hypothèses précédentes respectivement, $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Nombre de zéros p.s.

Remarques:

- L'hypothèse A.1 est satisfaite dès que ψ_ρ est Hölderienne et A.2 implique la condition de log-intégrabilité du théorème en moyenne.

Nombre de zéros p.s.

Remarques:

- L'hypothèse A.1 est satisfaite dès que ψ_ρ est Hölderienne et A.2 implique la condition de log-intégrabilité du théorème en moyenne.
- En particulier si les entrées a_k et b_k sont données comme accroissement de MBF, l'universalité p.s. est vérifiée (amélioration du résultat [ADP19]).

Signaux périodiques génériques

Souvent, l'étude des signaux aléatoires s'est intéressé à des fonctions analytiques du type

$$G_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \xi_k \phi_k(x),$$

où $(\xi_k)_{k\geq 1}$ est une suite de v.a. i.i.d. (voir Nguyen, Vu -2018)

- $\phi_k(x) = x^k$: polynômes de Kac
- $\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{k!}} x^k$: polynômes de Weyl

Ici on va travailler avec f fonction non-analytique, continue, 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, $\langle f, f \rangle > 0, \langle f', f' \rangle > 0$ pour étudier les zéros de

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(kt), \quad t \in [0, 2\pi],$$

avec $a_1, \ldots, a_n$ i.i.d. centrés de variance unitaire et admettant un moment d'ordre 3.

Universalité locale (Angst, Poly- 2020)

On considère

$$X_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k f\left(\frac{k(p_n+t)}{n}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

avec $p_n/n \to \alpha \in (0, 2\pi) \setminus \pi\mathbb{Q}$ vérifiant une condition arithmétique. Sous des conditions de moments et régularité de f, on a

Théorème: universalité locale (Angst, Poly -2020)

Pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, quand $n \to +\infty$,

$$\mathcal{N}(X_n, [a, b]) \Rightarrow \mathcal{N}(X_\infty, [a, b]),$$

où X_∞ est un processus Gaussien stationnaire tel que

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(X_\infty, [a, b])\right] = \frac{b-a}{\pi}\sqrt{\frac{1}{3}\frac{\|f'\|_2}{\|f\|_2}}.$$

CV vers un processus Gaussien

Posons $g_n(t) := S_n(X + t/n)$ défini sur $[0, 2\pi]$.

Théorème

Dès que $f \in \mathcal{C}^2$, le processus $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ converge en loi pour la topologie $\mathcal{C}^1$ vers un processus Gaussien stationnaire non-dégénéré de covariance

$$\mathbb{E}_X[g_\infty(t)g_\infty(s)] = \rho(t-s), \quad \text{avec} \begin{cases} \rho(u) := \frac{1}{u}\int_0^u (f * \check{f})(x)dx, \ u \neq 0 \\ \rho(0) = < f, f > \end{cases}$$

En particulier,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi]) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\|f'\|_2}{\|f\|_2}}.$$

On en déduit comme précédemment que quand $n \to +\infty$, $\mathbb{P}$-p.s., $\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])$ converge en loi sous $\mathbb{P}_X$ vers $\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])$ et donc $\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])$ converge en loi sous $\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X$ vers $\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])$.

Pour conclure à la convergence des espérances sous $\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X$, on souhaite établir une estimée d'équi-intégrabilité. On suppose de plus que f est polynomiale par morceaux avec des raccords $\mathcal{C}^q$, avec q assez grand et qu'il existe un voisinage de zéro sur lequel $|f^{(j)}(x)| \geq \alpha > 0$ pour un certain indice de dérivation j assez grand.

Par ailleurs,

Proposition

$$\mathbb{P}\text{-p.s., } \mathcal{N}(S_n, [0, 2\pi]) = O(n^2).$$

Sous l'hypothèse additionnelle précédente, on a équi-intégrabilité et donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}\mathcal{N}(S_n, [0, 2\pi])}{n} &= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X} \mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X} \mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi]) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\|f'\|_2}{\|f\|_2}}.
\end{aligned}$$

Perspectives

Perspectives

- Universalité globale pour le signal triangulaire?
- Cas μ_ρ continue non absolument continue: soit $\lambda \in (0,1)$. On considère

$$Y_\lambda := \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \lambda^n,$$

  où ε_n vaut ± 1 avec probabilité $1/2$. On note $\nu_\lambda := \mathbb{P}_{Y_\lambda}$ de sorte que

$$\nu_\lambda = *_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\delta_{-\lambda^n} + \delta_{\lambda^n} \right)$$

  Pour $\lambda < 1/2$, ν_λ est singulière. Quel est l'asymptotique dans ce cas pour le nombre moyen de zéros réels de f_n?
- Extension des méthodes non-Kac (point de vue S-Z d'une variable uniforme) pour les polynômes algébriques.
- Modèles en plus grande dimension, sur les variétés.

Bibliographie

- Pautrel T., New asymptotics for the mean number of zeros of random trigonometric polynomials with strongly dependent Gaussian coefficients, Electron. Commun. Probab. 25, 1-13, 2020
- Angst J., Pautrel T., Poly G., Real zeros of random trigonometric polynomials with dependent coefficients, submitted, arXiv:2102.09653
- Angst J., Pautrel T., Poly G., Global universality of the expected number of zeros of non-analytic random signals, preprint, 2021.

Merci de votre attention.