Marches Aléatoires Maximales Entropiques (MAME) et limites d'échelles

Yoann Offret

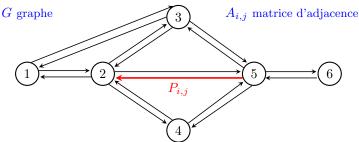
Université de Bourgogne Journées de Probabilité 2021 (Guidel Plages)

24/06/2021

- Marches Aléatoires Maximales Entropiques (MAME)
- Motivations et perspectives
- Quelques résultats
 - MAME sur IN
 - Processus d'exclusion

- 🚺 Marches Aléatoires Maximales Entropiques (MAME)
- 2 Motivations et perspectives
- Quelques résultats
 - MAME sur IN
 - Processus d'exclusion

Marches aléatoires et entropie



- 1. Probabilités de transition $P_{i,j}$
- 2. Probabilité invariante π
- 3. Entropie (taux,trajectorielle)

$$\frac{1}{n} \sum_{c \in \mathscr{C}_n} -\mathbb{P}_{\pi}(c) \log(\mathbb{P}_{\pi}(c)) \underset{n \to \infty}{\sim} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{P})$$

 \mathscr{C}_n ensemble des chemins de longueur n

Définition et construction de la MAME

Principe: maximiser l'entropie asymptotique moyenne

$$oldsymbol{H}(oldsymbol{P}) = \sum_{i} \pi_{i} \left(-\sum_{j} oldsymbol{P_{i,j}} \log(oldsymbol{P_{i,j}})
ight)$$

Définition et construction de la MAME

Principe: maximiser l'entropie asymptotique moyenne

$$H(P) = \sum_{i} \pi_{i} \left(-\sum_{j} P_{i,j} \log(P_{i,j}) \right)$$

Borne supérieure : $n\mathbf{H} \leq \log(\#\mathscr{C}_n)$

$$#\mathscr{C}_n = \mathbb{1}^T A^n \mathbb{1} \underset{n \to \infty}{\sim} |\langle \psi, \mathbb{1} \rangle|^2 \rho^n \quad \text{(Théorème spectrale)}$$

$$\implies \mathbf{H} < \log(\rho)$$

- ho > 0 valeur propre de module maximale rayon spectrale G / A
- ψ fonction propre positive associée normalisée $\sum_i \psi_i^2 = 1$

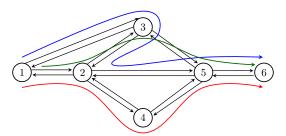
$$A\psi = \rho\psi \tag{1.1}$$

Définition et propriétés élémentaires

Nécessite informations **globales**, (ρ, ψ) t.q. $A\psi = \rho \psi$, **versus locales**, degrés $d_i = \sum_j A_{i,j}$, pour la MA simple. On pose alors

$$P_{i,j} = A_{i,j} \frac{\psi_j}{\rho \psi_i} \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \psi_i^2 \quad ; \quad \boldsymbol{H} = \log(\rho);$$

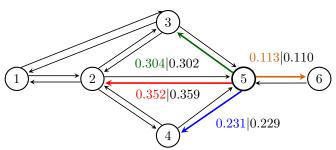
$$\mathbb{P}_i(i \to \cdots \to o \in \mathscr{C}_n) = \frac{\psi_o}{\rho^n \psi_i} \quad \left[\mathscr{L}(X_0, \cdots, X_n | X_0, X_n) \quad \text{uniforme} \right]$$



Approximations

$$M_n: P_{i,j}^{(n)} = \frac{\#\{i \to j \to \cdots \in \mathscr{C}_n\}}{\#\{i \to \cdots \in \mathscr{C}_n\}} \sim P_{i,j}$$

 M_5



Yoann Offret (uB) MAME et limites d'échelle 24/06/2021 7/23

- Marches Aléatoires Maximales Entropiques (MAME)
- Motivations et perspectives
- Quelques résultats
 - MAME sur IN
 - Processus d'exclusion

Physique statistique/quantique

 ψ^2 probabilité invariante \longleftrightarrow carré d'une fonction d'onde

$$(-\Delta \psi)_i + V_i \psi_i = E_0 \psi_i \iff A \psi = \rho \psi$$

οù

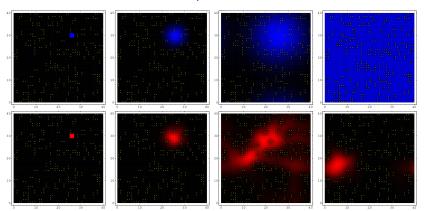
$$-\Delta$$
 Laplacien du graphe $V_i = d_{max} - d_i$ $E_0 = d_{max} - \rho$

- Z. Burda, J. Duda, J. M. Luck, and B. Waclaw Localization of the Maximal Entropy Random Walk (2009) **Phys. Rev. Lett.**
- Z. Burda, J. Duda, J. M. Luck, and B. Waclaw The various facets of random walk entropy (2010) **Acta Physica Polonica Series B**
- J. Duda Extended Maximal Entropy Random Walk (2012) PhD Thesis

Physique statistique/quantique

Phénomènes de localisation dans des milieux désordonnés :

MA simple versus MAME



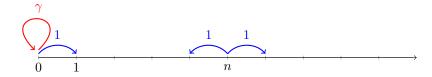
Duda, Burda & al.

Extensions, difficultées et questions

- Graphes dirigés finis fortement connexes
- 2. Ajouter des poids $w_{i,j} > 0$ aux arrêtes orientés $A \longleftarrow A \odot W$
- 3. Ajouter des contraintes (énergétiques)
- 4. Exemples explicites ? Problèmes combinatoires ardus
- 5. Graphes infinies / non connexes : Existence ? Unicité ?
- 6. Limites d'échelles : $\left\{\frac{X_{L^2t}}{L}\right\}_{t>0} \Longrightarrow ?$
- Apports dans les algorithmes stochastiques ? Eigenvector centrality, traitement d'images...
 - Rong-Hua Li & al. Link Prediction: the Power of Maximal Entropy Random Walk (2011)
 - Sinatra R. Hight-Order Markov Chains In Complex Networks (2011) PhD T.
 - Liantao Wang & al. Weakly Supervised Object Localization Via MERW (2014)

- Marches Aléatoires Maximales Entropiques (MAME)
- 2 Motivations et perspectives
- Quelques résultats
 - MAME sur IN
 - Processus d'exclusion

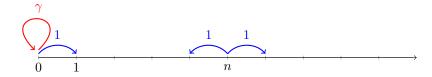
Le modèle



 \mathbb{N} + irrégularité à l'origine paramétrée par $\gamma \geq 0$

Yoann Offret (uB) MAME et limites d'échelle 24/06/2021

Le modèle



 \mathbb{N} + irrégularité à l'origine paramétrée par $\gamma \geq 0$



Yoann Offret (uB) MAME et limites d'échelle 24/06/2021

Limites d'échelles

Theorem (Duboux-Offret, 2021)

1) Rayon spectral
$$\rho_{\gamma} = \left\{ \begin{array}{ll} 2 & \gamma \leq 1 \\ \gamma + \frac{1}{\gamma} & \gamma \geq 1 \end{array} \right.$$

2)

$$\left\{\frac{X^{\gamma}(L^2t)}{L}\right\}_{t\geq 0} \Longrightarrow \{Y_t\}_{t\geq 0}$$

- i) $0 \le \gamma < 1$ Convergence vers un Bessel 3 : $dY_t = dB_t + \frac{1}{Y_t}dt$
- ii) $\gamma = 1 Mouvement Brownien : Y = B$
- iii) $\gamma := \gamma_L \sim 1 + \frac{1}{L}$: EDS réfléchie

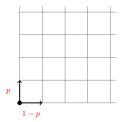
$$\begin{cases} dY_t = dB_t - dt \\ Y_t \ge 0 \end{cases}$$

Quelques commentaires

- 1. On retrouve des processus "classiques"
 - → Nombreux autres exemples !?
- 2. Quid des graphes infinis en général?
 - i) Existence et unicité dans le cas irréductible + R-récurrent

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\rho^n} A_{i,i}^n = \infty \quad [\textit{Vere} - \textit{Jones} (67)]$$

ii) Pas d'unicité en générale : Ex quadrant orienté \mathbb{N}^2



Une infinité de lois extrémales ME Qp

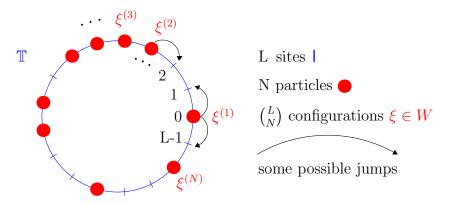
- a) $\mathbb{Q}_{1/2}$ vraie loi uniforme
- b) $\mathbb{Q}_{polya} = \int_0^1 \mathbb{Q}_p dp \to X_n$ uniforme

c.f. diag. de Bratelli / frontière de Martin...

- Marches Aléatoires Maximales Entropiques (MAME)
- Motivations et perspectives
- Quelques résultats
 - MAME sur IN
 - Processus d'exclusion

Le modèle

N particules **indistinguables** sur le tore discret 1-d à L sites



Motivation : Principe d'exclusion de Pauli (physique des particules)

Yoann Offret (uB) MAME et limites d'échelle 24/06/2021 17/23

Spectre et limites d'échelles

Theorem (Offret, 2021)

1. Spectre du graphe d'adjacence W explicite (Ex cas N = 2p + 1)

$$\psi_{m}(\xi) = \begin{vmatrix} e^{\frac{2i\pi m_1\xi_1}{L}} & e^{\frac{2i\pi m_1\xi_2}{L}} & \cdots & e^{\frac{2i\pi m_1\xi_N}{L}} \\ e^{\frac{2i\pi m_2\xi_1}{L}} & e^{\frac{2i\pi m_2\xi_2}{L}} & \cdots & e^{\frac{2i\pi m_2\xi_N}{L}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\frac{2i\pi m_N\xi_1}{L}} & e^{\frac{2i\pi m_N\xi_2}{L}} & \cdots & e^{\frac{2i\pi m_N\xi_N}{L}} \end{vmatrix} \\ \rho_{m} = 2\sum_{i=1}^{N} \cos\left(\frac{2\pi m_i}{L}\right)$$

- \hookrightarrow Perron-Frobenius : $m = (-p, -p+1, \cdots, p-1, p)$; $\Psi_c = \Psi$; $\rho_c = \rho$
- → Déterminant de Slater / Fonction d'onde de N fermions
 - 2. Spectre de la MAME constitué des polynômes de Schur sur \mathbb{U}_L^N

$$s_{\lambda}(heta) = rac{\psi_m(\xi)}{\psi(\xi)} \quad o \quad ext{v.p.} \quad rac{
ho_{\xi}}{
ho}$$

Spectre et limites d'échelles

Theorem (Offret, 2021)

- 3. Loi de N MA simples conditionnées à ne jamais se collisionner
- 4. Limite d'échelle diluée N fixé/L → ∞

$$\left\{\frac{\xi(L^2t)}{L}\right\}_{t\geq 0} \Longrightarrow \mathrm{d}X_t^{(i)} = \sqrt{\frac{1}{N}}\mathrm{d}B_t^{(i)} + \frac{1}{2N}\sum_{\substack{1\leq k\leq N\\k\neq i}}\cot\left(\frac{X_t^{(i)}-X_t^{(k)}}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

$$\Psi^2(\theta) \propto \prod_{i < i} \left| e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j} \right|^2$$
 invariant probability measure

→ Dyson Brownian Motion on the circle
 Non-colliding BM on the circle (Hobson, Werner 96)
 Unitary (circular) ensemble / BM spectrum on U(N)

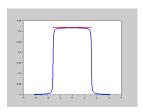
Perspectives

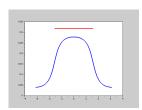
Limite hydrodynamique $N, L \rightarrow \infty, N/L \rightarrow \alpha$?

Conjecture: Mesure spectrale

$$\rho\left(L^2t,\frac{d\theta}{2\pi L}\right) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + 4\pi^4 \frac{\partial^2\rho}{\partial\theta^2} = 0$$

Éq. de Poisson versus éq. de la chaleur du proc. d'exclusion usuel





Yoann Offret (uB) MAME et limites d'échelle 24/06/2021 19/23

Perspectives

TASEP $N, L \rightarrow \infty$, $N/L \rightarrow \alpha$ $t \ll 1$?

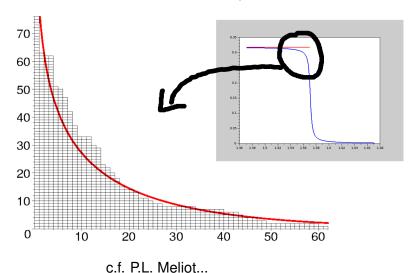
Motivations : Soit
$$c=(-N,-N+1,\cdots,-1)$$
 et $\xi=c+(\lambda_N,\cdots,\lambda_1)$, $\lambda_1\geq \lambda_2\geq \cdots \lambda_N\geq 0$ s.t. $\lambda\vdash n$

Code le déplacement des particules : Ex $\lambda = (5,4,1) \; \lambda \vdash 10$



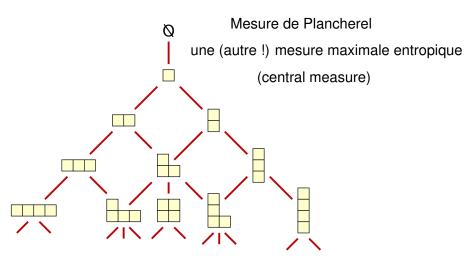
$$\mathbb{P}_c(X_n = \xi) = \#\{c o \xi \in \mathscr{C}_n\} rac{\Psi(\xi)}{
ho^n \Psi(c)} \xrightarrow[N o \infty]{} \mathbb{P}_{plancherel}^{(n)}(\lambda)$$

Tableaux de Young aléatoires $\mathbb{P}_{plancherel}^{(n)}$ lorsque $n \to \infty$



Yoann Offret (uB)

Tableaux de Young aléatoires ←→ trajectories in the Young lattice



Merci de votre attention

