

Modèles de spins discrets et continus

Arnaud Le Ny

LAMA-UPEC, UMR CNRS 8050, Université Paris Est

Journées de probabilités 2021, Guidel

Mardi 22 juin 2021, 9h-9h40

Travail en collaboration avec Aernout van Enter (Gronigen, NL) et Matteo D'Achille (Créteil),

Decimation for Two-Dimensional Ising and Rotator Models I (ArXiv :2105.07950)

Cadre probabiliste : *Espaces probabilisés produits*

Configurations $\sigma, \omega \in (\Omega, \mathcal{F}) = (E^S, \mathcal{E}^{\otimes S})$, $E = \{-1, +1\}$ ou S^1 , $S = \mathbb{Z}^2$

Deux modes alternatifs de description de mesures :

① **à la Kolmogorov** : Systèmes de marginales $(\mu_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{S}}$

Compatibilité par projections à volume fini $\Lambda \in \mathcal{S}$

② **à la DLR** : Spécifications $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{S}}$

Condition aux bords ω prescrite sur Λ^c , pour $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$,

$$\mu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega), \mu[\sigma_\Lambda \mid \mathcal{F}_{\Lambda^c}](\omega) = \gamma_\Lambda(\sigma \mid \omega), \mu - \text{p.s.}(\omega)$$

Gibbs : "Quasilocalité" + non-nulle (*finite-energy*)

μ DLR t.q. \exists une version continue de probabilités sachant \mathcal{F}_{Λ^c}

Program

- 1 Approche DLR : transitions de phases et états d'équilibre
- 2 Coexistence de phases pour modèles d'Ising et Rotateurs
- 3 Spécifications globales et mesures non-Gibbs

Mécanique statistique mathématique

Mécanique/Physique Statistique :

- 1 Du microscopique au macroscopique (\implies *Probabilités* μ, ν etc.).
- 2 Systèmes interactifs (non-indépendance, *au delà de 'Markov'*).
- 3 États d'équilibre selon la 2^{de} loi de la thermodynamique ($'F = U - TS'$).
- 4 **Transitions de phase** : différents comportements globaux.

$$H_\Lambda(\sigma|\omega) = \sum_{A \subset \Lambda} \Phi_A(\sigma) + \sum_{A \cap \Lambda^c \neq \emptyset} \Phi_A(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}), \quad \Phi = (\Phi_A)_{A \in \mathbb{Z}^d}, \quad \Phi_A \in \mathcal{F}_A.$$

Mathématique : riches familles de mesures de probabilités ('DLR')

Probabilités conditionnelles à la Boltzmann-Gibbs ($\beta = T^{-1}$) :

$$('DLR') \quad \Lambda \in \mathcal{S}, \quad \mu[\sigma_\Lambda | \omega_{\Lambda^c}] = \frac{1}{Z_\Lambda^\omega} e^{-\beta H_\Lambda(\sigma|\omega)}, \quad \mu - \mathbf{p.s.}(\omega)$$

Modèles d'Ising et Rotateurs

Spins discrets $\sigma_i \in \{-1, +1\}$ (**Ising**) ou continus $\vec{\sigma}_i \in \mathcal{S}^1$ (**rotateurs**)

Interactions de paires : couplages **ferro**. $J(i, j) = J(|i - j|) \geq 0$

$$\left(\forall i \in \mathbb{Z}^d, \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |J(i, j)| < \infty \right), \quad H(\sigma) = - \sum_{i, j \in \mathbb{Z}^d} J(i, j) \cdot \langle \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \rangle$$

1 **Proche-voisins** ($d = 1, 2, 3$) : $J \geq 0, i, j \in \mathbb{Z}^d$

$$J^{n.n.}(i, j) := J \cdot \mathbf{1}_{|i-j|=1}$$

2 **Isotropique à longue portée** ($d = 1, 2, \alpha > d$) : $J \geq 0, i, j \in \mathbb{Z}^d$,

$$J^1(i, j) := J \cdot |i - j|^{-\alpha}$$

3 **Anisotropique à (très) longue portée** ($d = 2, \alpha_1, \alpha_2 > 1$) : $J \geq 0$

$$J^2(i, j) := J \cdot |i_2 - j_2|^{-\alpha_2} \cdot \mathbf{1}_{|i_1 - j_1|=0} + J \cdot |i_1 - j_1|^{-\alpha_1} \cdot \mathbf{1}_{|i_2 - j_2|=0}$$

Mesures DLR – Mesures de Gibbs

Dobrushin 68 – Lanford/Ruelle 69 – Preston 76 – Dynkin 78 – Georgii 88

Hamiltonien à condition aux bords $\omega \in \Omega$, à volume fini $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$

$$H_{\Lambda}(\sigma|\omega) := H_{\Lambda}(\sigma_{\Lambda}\omega_{\Lambda^c}) = - \sum_{i,j \in \Lambda} J(i,j)\sigma_i\sigma_j - \sum_{i \in \Lambda, j \in \Lambda^c} J(i,j)\sigma_i\omega_j$$

Spécifications de Gibbs sur $(E^S, \mathcal{E}^{\otimes S})$: Noyaux de transition

$$\gamma_{\Lambda}^{\beta}(\sigma|\omega) := \frac{1}{Z_{\Lambda}^{\omega}} e^{-\beta H_{\Lambda}(\sigma|\omega)}, \beta > 0$$

Équations DLR : $\mu \in \mathcal{G}(\gamma^{\beta}) \iff \mu\gamma_{\Lambda}^{\beta} = \mu, \forall \Lambda \in S$

ou à la Markov : $\mu[\sigma_{\Lambda}|\mathcal{F}_{\Lambda^c}](\omega) = \gamma_{\Lambda}^{\beta}(\sigma|\omega), \mu\text{-p.s.}(\omega)$

Spécifications locales et globales

Mesures DLR : $\mathcal{G}(\gamma) := \{\mu \in \mathcal{G}(\gamma) : \mu\gamma_\Lambda = \mu\}$

Spécifications (locales) : $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathbb{Z}^d}$ Noyaux de probabilités

$$\gamma_\Lambda : \Omega \times \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]; (\omega, A) \mapsto \gamma_\Lambda(A | \omega)$$

- 1 $\forall \omega \in \Omega, A \mapsto \gamma_\Lambda(A | \omega)$ est une Probabilité
- 2 $\forall A \in \mathcal{F}, \omega \mapsto \gamma_\Lambda(A | \omega)$ est mesurable
- 3 (*Propreté*) $\forall B \in \mathcal{F}_{\Lambda^c}, \gamma_\Lambda(B | \omega) = \mathbf{1}_B(\omega)$.
- 4 (*Cohérence DLR*) $\Lambda \subset \Lambda' \implies \gamma_{\Lambda'} \gamma_\Lambda = \gamma_{\Lambda'}$ (produit de noyaux)

Spécifications globales : Noyaux $\Gamma = (\Gamma_\Delta)_{\Delta \subset \mathbb{Z}^d}$ tq. 1., 2., 3., 4., $\forall \Delta$

NB $d = 1$: Chaînes de Markov vs. Champs de Markov (unilatère/bilatère).
Extensions : Marches à mémoires, VLMC, g-mesures vs. mesures de Gibbs

États extrémaux – "Phases".

Warning : Il peut y avoir des mesures de Gibbs extrémales et non-invariantes par translation (et parfois beaucoup)

Décomposition extrême – Ensemble convexe $\mathcal{G}(\gamma^\beta) \neq \emptyset$

$$\mu \in \mathcal{G}(\gamma^\beta) \iff \mu(\cdot) = \int_{\text{ex}\mathcal{G}(\gamma)} \nu \alpha_\mu(d\nu)$$

États extrémaux : états macroscopiques avec trivialité asymptotique

$$\mu \in \text{ex}\mathcal{G}(\gamma) \iff \mu \text{ triviale sur } \mathcal{F}_\infty := \bigcap_{\Lambda \in \mathcal{S}} \mathcal{F}_\Lambda^c$$

Différents ensembles pertinents de mesures de probabilités :

- 1 Ensemble $\mathcal{G}(\gamma)$ des mesures de Gibbs
- 2 $\text{ex}\mathcal{G}(\gamma)$: mesures de Gibbs extrémales (*phases*)
- 3 $\text{ex}\mathcal{G}(\gamma) \cap \mathcal{M}_{\text{inv}}$: extrémaux et invariants par translation (*phases pures*)

Program

- 1 Approche DLR : transitions de phases et états d'équilibre
- 2 Coexistence de phases pour modèles d'Ising et Rotateurs
- 3 Spécifications globales et mesures non-Gibbs

Premières mesures de Gibbs à Vol. infini $\Lambda \uparrow \mathcal{S}$

Limites faibles μ^- , μ^+ (Ising) ou μ^θ (rotateurs)

Modèles Ferromagnétiques ($J(i, j) \geq 0$, $d = 2$ dans le cas rotateur)

Ordre stochastique " \leq " : $\mu \leq \nu$ ssi f croissante $\implies \int f d\mu \leq \int f d\nu$

1 Limites monotones bien-définies $\mu_\beta^-, \mu_\beta^+ \in \mathcal{G}(\gamma^\beta)$ (ou μ^θ) :

$$\mu_\beta^-(\cdot) := \lim_{\Lambda \uparrow \mathcal{S}} \gamma_\Lambda^\beta(\cdot | -), \quad \mu_\beta^+(\cdot) := \lim_{\Lambda \uparrow \mathcal{S}} \gamma_\Lambda^\beta(\cdot | +)$$

2 Toute autre mesure de Gibbs $\mu \in \mathcal{G}(\gamma^\beta)$ satisfait : $\mu_\beta^- \leq \mu \leq \mu_\beta^+$

3 Les mesures extrémales sont atteignables par des c.b. typiques :

$$\text{Si } \mu \in \text{ex}\mathcal{G}(\gamma^\beta), \text{ alors } \lim_{\Lambda} \gamma_\Lambda^\beta(\cdot | \omega) = \mu(\cdot) \text{ } \mu\text{-p.s.}(\omega)$$

Autres questions : *Incoherent random boundary conditions* (metastates),
mesures sans conditions aux bords *déterministes* (Coquille 2013), etc.

Cas classiques : Ising proches voisins $d = 1, 2, 3$

Modèle d'Ising proche-voisins $d = 1$: $\mathcal{G}(\gamma^\beta) = \{\mu\}$

Modèle d'Ising proche-voisins $d = 2$: $\exists \beta_c(2) > 0$ tel que

$$\mathcal{G}(\gamma^\beta) = \{\mu\} \text{ pour } \beta \leq \beta_c \text{ et } \mathcal{G}(\gamma^\beta) = [\mu_\beta^-, \mu_\beta^+] \text{ pour } \beta > \beta_c$$

Toute autre mesure de Gibbs s'écrit $\mu = \alpha\mu^- + (1 - \alpha)\mu^+ \in \mathcal{G}_{\text{inv}}(\gamma^\beta)$

Modèle d'Ising proche-voisins $d = 3$: $\mathcal{G}_{\text{inv}}(\gamma^\beta) = [\mu_\beta^-, \mu_\beta^+], \beta > \beta_c$

États de Dobrushin à basse T (pour $\beta > \beta_c(2)$) :

$$\mu^\pm(\cdot) := \lim_{\Lambda} \gamma_\Lambda(\cdot | \pm) \in \text{ex}\mathcal{G}(\gamma) \setminus \mathcal{M}_{\text{inv}}(\Omega), \mu^\pm \neq \frac{1}{2}\mu^- + \frac{1}{2}\mu^+$$

\pm : conditions de Dobrushin, mixte ± 1 (+ en haut, - en bas)

États de Dobrushin en dimension 3

Dobrushin 1972 – van Beijeren 1975 – Bricmont-Lebowitz-Pfister 1979–81

Conditions aux bords de Dobrushin en $d = 3$: interfaces *rigides*

\exists État extrémal non-translation-invariant : $\mu^\pm \neq \frac{1}{2}\mu^+ + \frac{1}{2}\mu^-$

\implies Nb dénombrable d'états extrémaux non-t.-i. = **États de Dobrushin**

Importance : source de contre-exemples Markov locale sans Markov globale ou d'absence de limite faible ; non-ergodicité.

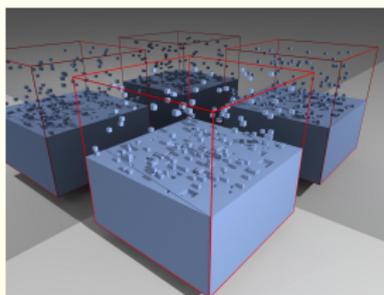


FIGURE – États de Dobrushin ($d = 3$)

Interface microscopique en dimension 2

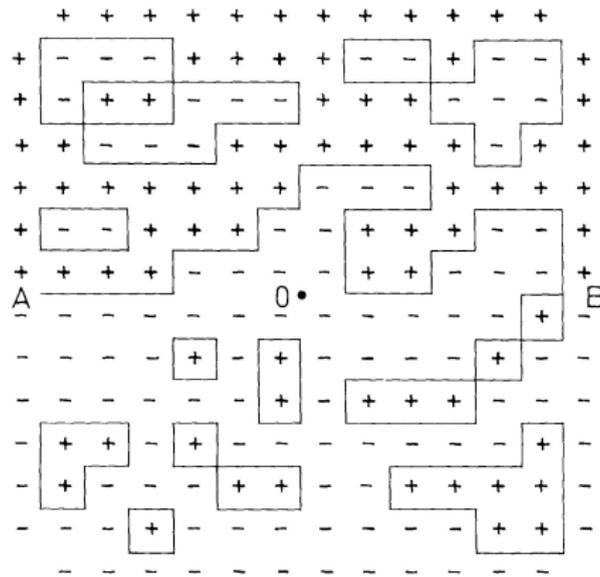


Fig. 2.

FIGURE – Contours de Peierls et ligne de Gallavotti

Absence d'état de Dobrushin en $2d$

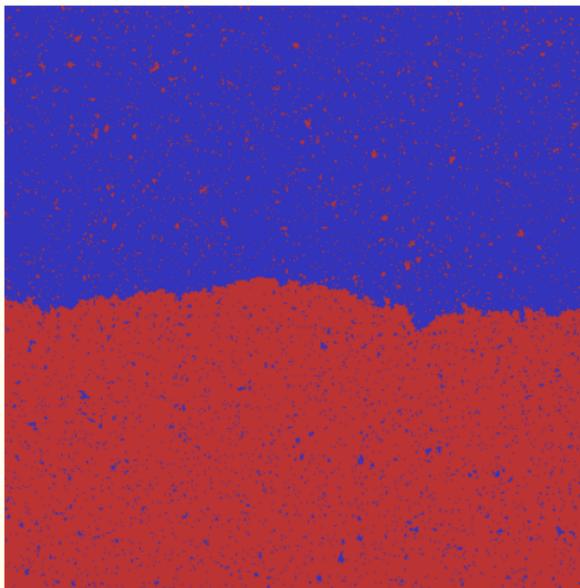


FIGURE – Fluctuations gaussiennes de l'interface : $\mu^\pm = \frac{1}{2}\mu^- + \frac{1}{2}\mu^+$

Transition de Phase en Dimension 1 : 'Dyson models'

Varier le degré α s'apparente à une augmentation de dimension

'Dyson models' : Ising à longue portée, décroissance polynomiale $\alpha > 1$

- Unicité pour $\alpha > 2$ (Ruelle 1968, Dobrushin 1968, BLP 1979).
- **Transition de phase pour $1 < \alpha < 2$ à basse T.** (Kac-Thompson).
Dyson 1969, Fannes *et al.* 1974, Georgii 1988 : $\mathcal{G}(\gamma) = [\mu^-, \mu^+]$
- $\alpha = 2$: *Transition hybride*; Dyson 1971, Fröhl.-Spe. 1982, ACCN 1988
- **Description en triangle/contours** FP82, Cassandro *et al.* 2005+
- **Coexistence de phases et interfaces** à basse T CMPR 2014-2017.
- Extensions : Picco *et al.* 2012-2017, Bissacot *et al.* 2018, ...
- Exemple de mesures de Gibbs non-g-mesure (Keane 1972).

Ising à longue portée en dimension 2

Transition de phase à basse T ($d = 2$, $\alpha > 2$)

- *Cas Ferromagnétiques* : inégalités de corrélation (Griffiths 1964)
- '*Reflection-Positivity*' : Transition de Phase pour $\alpha \in (2, 4)$.
 $\alpha_c = 4$ valeur critique pour MF vs. $n.n$ exposants critiques (Aizenman-Fernandez LMP 1988).
- $\alpha > 3$: **Ginibre *et al.*** (1966) prouve TP *via* l'énergie libre.
- $\alpha > 3$: **Gertzik-Pirogov-Sinai** (GPS 1976) : description en termes de contours et d'estimées de Peierls.

Coquille *et al.* 2018 : Absence d'états de Dobrushin en dimension 2

Structures de $\mathcal{G}(\gamma)$ dans le cas Rotateurs (*XY-models*)

(unicité à haute température par effets entropiques)

Basse température : Transition de phase (effets énergétiques)

Proche-voisins : - $d = 1$: Unicité $\mathcal{G}(\gamma) = \{\mu\}$

- $d = 2$: Unicité $\mathcal{G}(\gamma) = \{\mu\}$ (Mermin-Wagner)

- $d = 3$: Transition de phase à basse T (RP).

$$\text{ex}\mathcal{G}(\gamma) = \{\mu^\theta, \theta \in]-\pi, +\pi]\}$$

- $d = 4$: Interfaces ? Vortex ?

Longue-portée $\alpha > d$:

- $d = 2$: (Kunz-Pfister) $\alpha \in (2, 4)$, $\beta \geq \beta_c \implies \mathcal{G}(\gamma) = [\mu^-, \mu^+]$

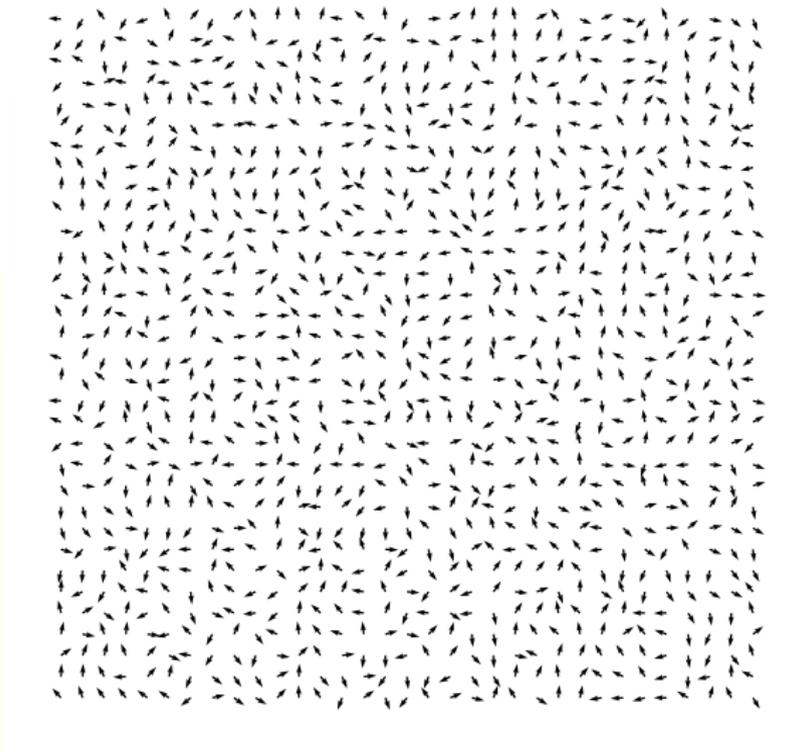


FIGURE – 'Haute' Température $d=2$

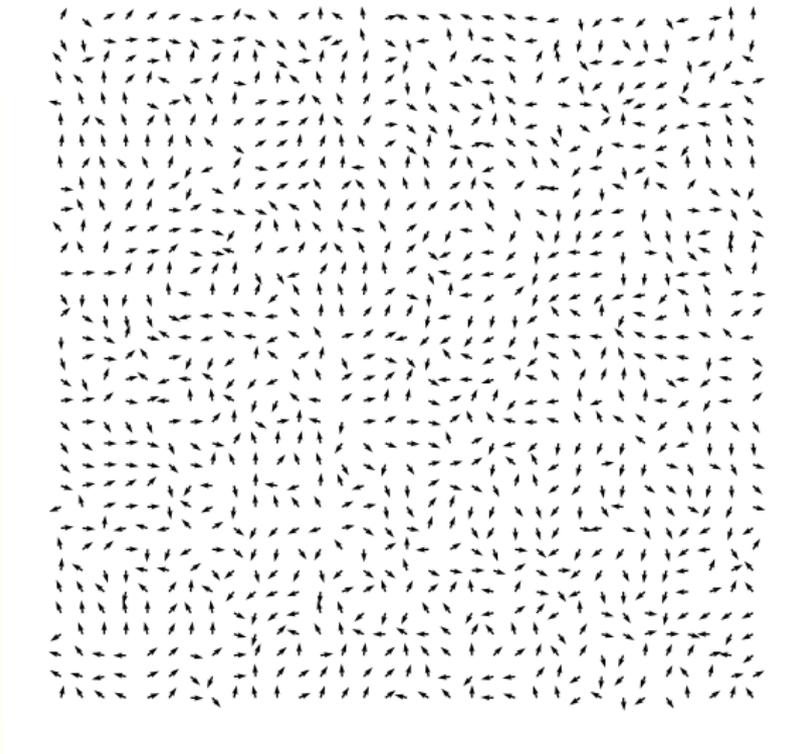


FIGURE – Température "presque critique" $d = 2$

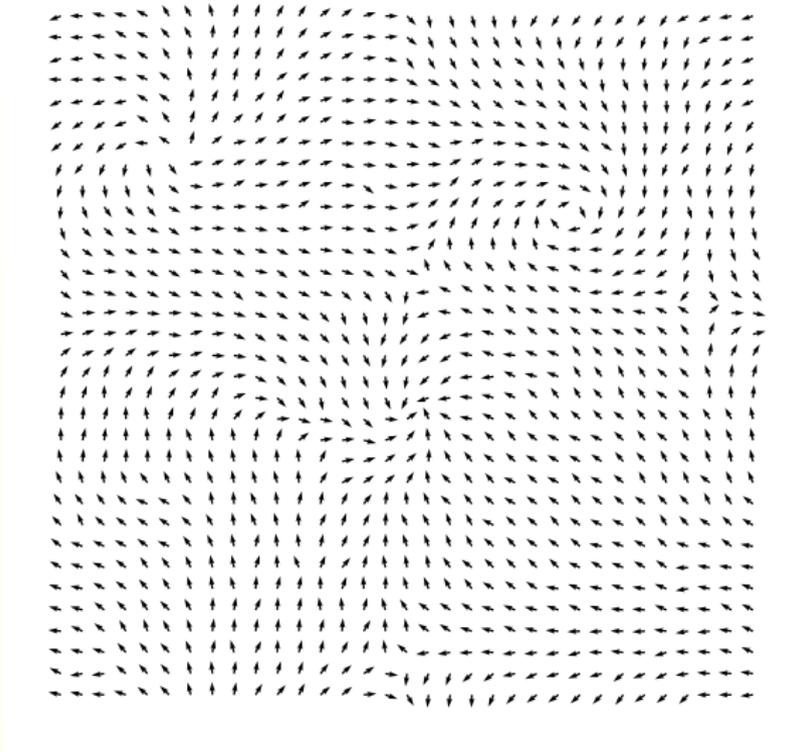


FIGURE – 'Basse' température



Program

- 1 Approche DLR : transitions de phases et états d'équilibre
- 2 Coexistence de phases pour modèles d'Ising et Rotateurs
- 3 Spécifications globales et mesures non-Gibbs**

Spécifications globales – Cas Attractifs

Fernández/Pfister 97 – Fernández/Maillard 07 – LN 13 - DAvELN 21

But : Étendre les spécifications γ en $\Gamma^+ = (\Gamma_\Delta^+)_{\Delta \subset S}$, Δ **infini** t.q.

$$\mu^+ \in \mathcal{G}(\Gamma^+) : \forall \Delta \subset S, \forall A \in \mathcal{F}, \mu^+ [A | \mathcal{F}_{\Delta^c}] (\cdot) = \Gamma_\Delta^+ (A | \cdot), \mu^+ - \text{p.s.}$$

Exemples : $S = \mathbb{Z}^2, \Delta = (\mathbb{Z}^2)^+$; $S = \mathbb{Z}^2, \Delta = (2\mathbb{Z}^2)^c$; $S = \mathbb{Z}, \Delta = \mathbb{Z}^+$

Cas attractifs monotones type ferromagnétique

- Pour $\Delta = \Lambda \Subset S$, prendre $\Gamma_\Delta^+ = \gamma_\Lambda$
- Geler la condition aux bords sous ω en dehors de Δ
- Prendre la limite monotone avec condition aux bords $+$ dans Δ :

$$\Gamma_\Delta^+ (\sigma | \omega) = \lim_{\Lambda_n \uparrow S} \gamma_{\Lambda_n} (\sigma | +_\Delta \omega_{\Delta^c})$$

Décimation de modèles d'Ising $2d$

Mesures décimées : $\nu = T\mu$, $\nu_{\beta}^{+} := T\mu_{\beta}^{+}$, $\nu_{\beta}^{-} := T\mu_{\beta}^{-}$

$T : \Omega \longrightarrow \Omega' = \Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^2}$; $\omega \longmapsto \mathbf{T}(\omega) = \omega'$, avec $\omega'_i = \omega_{2i}$

Clé : Discontinuité essentielle des probas conditionnelles sachant la configuration spéciale $(\omega'_{\text{alt}})_i = (-1)^{i_1+i_2}$, $i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2$

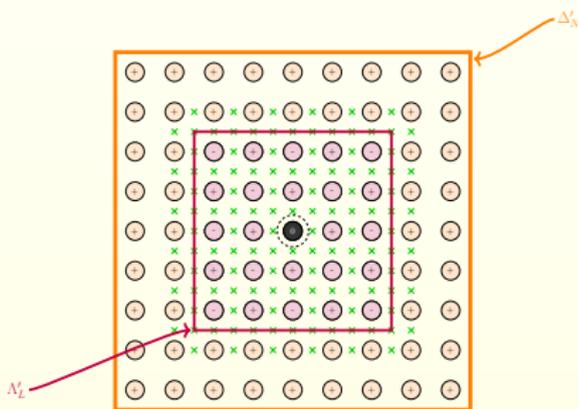


FIGURE – Transition de phase cachée – Discontinuité essentielle

Par propriété de mesure image, pour $f(\sigma) = \sigma_0$

$$\forall \omega' \in \mathcal{N}'_{\Lambda'}(\omega'_{\text{alt}}), \nu^+[\sigma'_0 | \mathcal{F}'_{\{0\}^c}](\omega') = \mu^+[\sigma_0 | \mathcal{F}_{\lambda^c}](\omega), \omega \in T^{-1}(\omega')$$

$$\text{avec } \lambda = (2\mathbb{Z}^2 \cap \{0\}^c)^c = (2\mathbb{Z})^c \cup \{0\} \text{ non fini}$$

Voisinages $\mathcal{N}^{1/2} = \mathcal{N}'_{\Lambda', \Delta'}(\omega'_{\text{alt}})$ avec \neq limites si transition de phase :

$$\lim_{\Lambda', \Delta' \uparrow \mathcal{S}} \sup_{\omega'_i \in \mathcal{N}^j, j=1,2} |\nu^+[\sigma'_0 | \mathcal{F}'_{\{0\}^c}](\omega'_1) - \nu^+[\sigma'_0 | \mathcal{F}'_{\{0\}^c}](\omega'_2)| > 0.$$

\implies Discontinuité essentielle, mesure non-Gibbs pour

- Ising longue portée isotropique $\alpha > 2$
- Ising longue portée anisotropique $\alpha > 1$
- Rotateurs anisotropiques ou à longues portées $d = 2$
- Perspectives : transition "spin-flops", non-Gibbs même avec unicité.