Modèles individu-centrés en dynamique adaptative et évolution en temps long :

le cas des mutations petites et fréquentes

Nicolas Champagnat[1] - Vincent Hass[2]

INRIA — Université de Lorraine — Institut Élie Cartan

Journées de Probabilités – Guidel Plages

22 Juin 2021

[1] nicolas.champagnat@inria.fr
[2] vincent.hass@inria.fr

Dynamique adaptative - Hypothèses

Définition : Dynamique adaptative[1]

Étudier les liens entre l'écologie et l'évolution.

Mécanismes de l'évolution

- **Hérédité**
- **Mutations**
- **Sélection**

Hypothèses biologiques

(HB1) Population asexuée $\rightsquigarrow$ Simplifier le schéma de reproduction.

(HB2) Mutations rares
$\rightsquigarrow$ Séparation des échelles de temps écologique et évolutive.

(HB3) Petites mutations
$\rightsquigarrow$ Évolution agit lentement sur les caractéristiques individuelles.

(HB4) Grande population $\rightsquigarrow$ Densité de population déterministe.

[1] Metz, Geritz et al. (1996)

Dynamique adaptative - Succès

$\rightsquigarrow$ Fournir une description de l'évolution du **trait dominant** :
Équation Canonique de la Dynamique Adaptative (CEAD)[2].

Équation Canonique

$$\text{CEAD} = \boxed{\text{Gradient de fitness}} \times \boxed{\text{Effets des mutations}}$$

[2] DIECKMANN, LAW (1996)

État de l'art mathématique

(HB2) $\rightsquigarrow$ Probabilité de mutation p **(HB3)** $\rightsquigarrow$ Taille des mutations σ
(HB4) $\rightsquigarrow$ Taille de population K

Une approche basée sur des **EDP**

$$\text{IBM} \xrightarrow[K \longrightarrow +\infty]{[3]} \text{EDP} \xrightarrow[\sigma \longrightarrow 0]{[4]} \text{CEAD1}$$

Une approche **stochastique**

$$\text{IBM} \xrightarrow[\substack{K \longrightarrow +\infty \\ p \longrightarrow 0}]{[5]} \text{TSS} \xrightarrow[\sigma \longrightarrow 0]{[6]} \text{CEAD2}$$

[3] Fournier, Méléard (2004) [4] Dieckmann, Jabin et al (2005) - [5] Champagnat (2006) - [6] Champagnat, Méléard (2011)

Objectif

Notre approche - Mutations individuelles fréquentes $(p \equiv 1)$

$$\textbf{IBM} \xrightarrow[\substack{K \longrightarrow +\infty \\ \sigma \longrightarrow 0}]{} \textbf{CEAD3}$$

Modèle individu-centré (IBM) (1/2)

(1) Processus de Naissance-Mort-Compétition-Mutation[7,8].

- Chaque individu est caractérisé par un trait phénotypique continu $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$: e.g. la taille du corps à maturité.
- Au temps t, la population est composé de $N^{K,\sigma}(t)$ individus et de traits $x_1, \ldots, x_{N^{K,\sigma}(t)}$ et décrit par le *processus à valeurs mesures*:

$$\nu_t^{K,\sigma} := \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{N^{K,\sigma}(t)} \delta_{x_i}.$$

(2) Taux de transition d'un individu de trait x ($p \equiv 1$).

- Naissance au taux $b(x)$ d'un trait mutant $y := x + \sigma H$ où
  $H \sim m(\mathrm{d}h)$: loi de mutation.
- Mort **sans** compétition au taux $d(x)$.
- Mort **par** compétition avec n'importe quel autre individu de trait y au taux $\frac{c(x,y)}{K}$.

[7] Bolker, Pacala (1997) - [8] Fournier, Méléard (2004)

Modèle individu centré (IBM) (2/2)

(3) Autres paramètres biologiques.

- $\overline{n}(x) := \frac{b(x)-d(x)}{c(x,x)}$: densité d'équilibre d'une population monomorphique de trait x quand il n'y a pas de mutation.

- $\mathrm{Fit}(y,x) := b(y) - d(y) - c(y,x)\overline{n}(x)$: fitness d'un individu mutant de trait y dans une population résidente monomorphique portant le trait x.

Théorème - Une nouvelle équation canonique

Théorème (En construction)

On suppose

- *de bonnes hypothèses concernant les paramètres biologiques :* $\rightsquigarrow$ *régularité sur* $b(x), d(x), c(x,y), m(\mathrm{d}h)$,
- $\nu_0^{K,\sigma}$ *de support* $\{x_0\}$ *pour tout* K *et pour tout* σ,
- $p \equiv 1$, $\sigma \to 0$ *et* $K \to +\infty$ *de sorte que*

$$\sigma \ll K^{-\frac{3}{2}}.$$

Alors, pour la topologie de Skorohod *sur* $\mathbb{D}\left(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_F\right)$,

$$\left(\nu^{K,\sigma}_{\frac{t}{K\sigma^2}}\right)_{t\geqslant 0} \xrightarrow[\substack{K\longrightarrow+\infty \\ \sigma\longrightarrow 0}]{\text{Loi}} \left(\overline{n}(x(t))\delta_{x(t)}\right)_{t\geqslant 0}$$

où $x(0) = x_0$ *et*

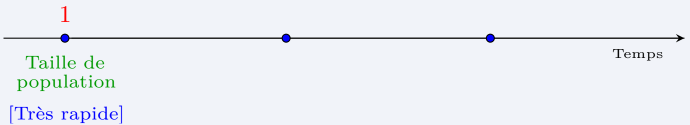
$$x'(t) = \boxed{\partial_1 \mathrm{Fit}(x(t), x(t))} \times \boxed{\overline{n}(x(t)) \int_{\mathbb{R}} h^2 m(\mathrm{d}h)} \qquad \textbf{(CEAD3)}$$

(1) Différentes dynamiques mises en jeu

IBM : Trois échelles de temps

(1) Différentes dynamiques mises en jeu

IBM : Trois échelles de temps

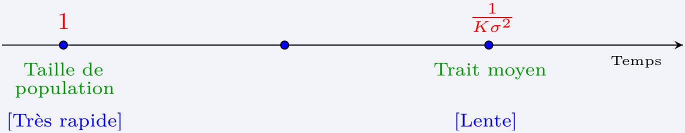


Dynamique très rapide

$\rightsquigarrow$ Taille de population $\left\langle 1, \nu_t^{K,\sigma} \right\rangle$

(1) Différentes dynamiques mises en jeu

IBM : Trois échelles de temps

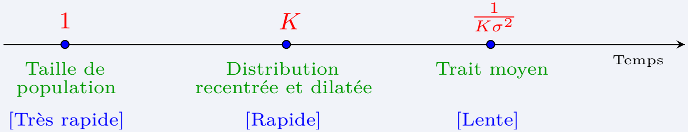


Dynamique lente

$$\rightsquigarrow \quad \text{Trait moyen} \quad z\left(\nu_t^{K,\sigma}\right) := \frac{\left\langle \mathrm{id}, \nu_t^{K,\sigma} \right\rangle}{\left\langle 1, \nu_t^{K,\sigma} \right\rangle}$$

(1) Différentes dynamiques mises en jeu

IBM : Trois échelles de temps



Dynamique rapide

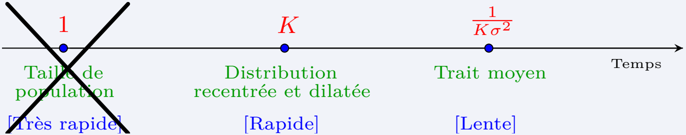
$\rightsquigarrow$ Distribution recentrée, dilatée et rescalée de traits

$$\overset{\circ}{\nu}{}_t^{K,\sigma} := \frac{1}{K\left\langle 1, \nu_t^{K,\sigma} \right\rangle} \sum_{i=1}^{N^{K,\sigma}(t)} \delta_{\frac{1}{\sigma\sqrt{K}}\left(x_i - z\left(\nu_t^{K,\sigma}\right)\right)}$$

$$=: \left(h_{\frac{1}{\sigma\sqrt{K}}} \circ \tau_{-z\left(\nu_t^{K,\sigma}\right)}\right) \sharp \frac{\nu_t^{K,\sigma}}{\left\langle 1, \nu_t^{K,\sigma} \right\rangle}$$

(1) Différentes dynamiques mises en jeu

IBM : Trois échelles de temps



$\rightsquigarrow$ Intuitions sur un **modèle jouet**.

(2) Modèle jouet (1/2)

Modèle jouet

$$\mathcal{L}^{K,\sigma}\Phi(\nu) = \frac{K}{K\sigma^2}\int_{\mathcal{X}} \nu(\mathrm{d}x) C(x) \int_{\mathbb{R}} m(\mathrm{d}h) \left[\Phi\left(\nu - \frac{\delta_x}{K} + \frac{\delta_{x+\sigma h}}{K}\right) - \Phi(\nu)\right]$$
$$+ \frac{K}{K\sigma^2}\int_{\mathcal{X}} \nu(\mathrm{d}x) \int_{\mathcal{X}} \nu(\mathrm{d}y) b(x,y) \left[\Phi\left(\nu - \frac{\delta_x}{K} + \frac{\delta_y}{K}\right) - \Phi(\nu)\right]$$

$\rightsquigarrow$ Taille de population **fixée**

$\rightsquigarrow$ Lent-Rapide : $(z(\nu), \hat{\nu})$ où

Trait moyen $z(\nu) := \langle \mathrm{id}, \nu \rangle$

Distribution recentrée et dilatée des traits

$$\hat{\nu} := \left(h_{\frac{1}{\sigma\sqrt{K}}} \circ \tau_{-z(\nu)}\right) \sharp \, \nu$$

Modèle jouet (2/2)

(a) Comportement asymptotique - Composante lente

Fonctions tests : $\hat{\Phi}(z,\hat{\mu}) = f(z)$,

$$\widehat{\mathcal{L}}^{K,\sigma}\hat{\Phi}(z,\hat{\mu}) = f'(z)(\partial_2 b(z,z) - \partial_1 b(z,z))M_2(\hat{\mu}) + O\left(\frac{1+M_2(\hat{\mu})}{K}\right).$$

(b) Comportement asymptotique - Composante rapide

Fonctions tests : $\hat{\Phi}(z,\hat{\mu}) = F_g(\hat{\mu}) := F(\langle g,\hat{\mu}\rangle)$,

$$\widehat{\mathcal{L}}^{K,\sigma}\hat{\Phi}(z,\hat{\mu}) = \frac{1}{KK\sigma^2}\Bigg[F'(\langle g,\hat{\mu}\rangle)\left\{C_2 C(z)\left\langle \frac{g''}{2},\hat{\mu}\right\rangle + b(z,z)\left[\left\langle g'',\hat{\mu}\right\rangle M_2(\hat{\mu}) - 2\left\langle g'\times \mathrm{id},\hat{\mu}\right\rangle\right]\right\}$$
$$+ F''(\langle g,\hat{\mu}\rangle)\, b(z,z)\left\{\left(\left\langle g^2,\hat{\mu}\right\rangle - \langle g,\hat{\mu}\rangle^2\right) + \left\langle g',\hat{\mu}\right\rangle^2 M_2(\hat{\mu}) - 2\left\langle g',\hat{\mu}\right\rangle \langle g\times \mathrm{id},\hat{\mu}\rangle\right\}$$
$$+ O\left(\frac{1+M_2(\hat{\mu})+M_3(\hat{\mu})}{K}\right)\Bigg],$$

où $M_j(\hat{\mu}) = \int_{\mathcal{X}} |x|^j \hat{\mu}(\mathrm{d}x)$ et $C_2 = \int_{\mathbb{R}} h^2 m(h)\mathrm{d}h$.

$\rightsquigarrow$ On reconnait un processus de FLEMING-VIOT neutre recentré.

(3)(a) Processus de Fleming-Viot - Existence (1/3)

Cadre. $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}\right)$ où $\Omega := \mathscr{C}\left([0,+\infty[\,, \mathcal{M}_1(\mathbb{R})\right)$

Problème de martingale pour Fleming-Viot **original**[9]

La probabilité $\mathbb{P}^{FV}_\nu \in \mathcal{M}_1(\Omega)$ est solution au *problème de martingale de* Fleming-Viot avec condition initiale $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, si le processus canonique $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ sur Ω satisfait $\mathbb{P}^{FV}_\nu(Y_0 = \nu) = 1$ et si pour tous $F \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^2_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$M^F_t(g) := F(\langle g, Y_t\rangle) - F(\langle g, Y_0\rangle) - \int_0^t F'(\langle g, Y_s\rangle)\left\langle \frac{g''}{2}, Y_s\right\rangle \mathrm{d}s - \gamma\int_0^t F''(\langle g, Y_s\rangle)\left[\left\langle g^2, Y_s\right\rangle - \langle g, Y_s\rangle^2\right]\mathrm{d}s \qquad (\blacklozenge)$$

est une $\mathbb{P}^{FV}_\nu-$martingale.

[9] Etheridge (2000)

(3)(a) Processus de FLEMING-VIOT - Existence (2/3)

Cadre. $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geqslant 0}\right)$ où

$$\widetilde{\Omega} := \left\{ X \in \mathscr{C}\left([0,+\infty), \mathcal{M}_1^{c,2}(\mathbb{R})\right) \,\middle|\, \forall T>0,\ \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int_{\mathbb{R}} |x|^2 X_t(\mathrm{d}x) < \infty \right\}$$

avec $\mathcal{M}_1^{c,2}(\mathbb{R}) := \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}} |x|^2 \mu(\mathrm{d}x) < \infty, \int_{\mathbb{R}} x\mu(\mathrm{d}x) = 0 \right\}$.

(3)(a) Processus de Fleming-Viot - Existence (2/3)

Problème de martingale pour Fleming-Viot **recentré**

La probabilité $\mathbb{P}_\mu \in \mathcal{M}_1(\widetilde{\Omega})$ est solution au *problème de martingale de* Fleming -Viot **recentré** avec condition initiale $\mu \in \mathcal{M}_1^{c,2}(\mathbb{R})$, si le processus canonique $(X_t)_{t\geqslant 0}$ sur $\widetilde{\Omega}$ satisfait $\mathbb{P}_\mu(X_0 = \mu) = 1$ et pour tous $F \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\widehat{M}_t^F(g) := F(\langle g, X_t\rangle) - F(\langle g, X_0\rangle) - \int_0^t F'(\langle g, X_s\rangle)\Bigg(\left\langle \frac{g''}{2}, X_s\right\rangle \\ + \gamma\left[\left\langle g'', X_s\right\rangle M_2(X_s) - 2\left\langle g' \times \mathrm{id}, X_s\right\rangle\right]\Bigg)\mathrm{d}s \\ - \gamma\int_0^t F''(\langle g, X_s\rangle)\Big[\left(\left\langle g^2, X_s\right\rangle - \langle g, X_s\rangle^2\right) \\ + \left\langle g', X_s\right\rangle^2 M_2(X_s) - 2\left\langle g', X_s\right\rangle\langle g \times \mathrm{id}, X_s\rangle\Big]\mathrm{d}s\end{aligned} \qquad (\blacklozenge\blacklozenge)$$

est une $\mathbb{P}_\mu-$martingale.

.

(3)(a) Processus de Fleming-Viot - Existence (2/3)

Problème de martingale pour Fleming-Viot **recentré**

La probabilité $\mathbb{P}_\mu \in \mathcal{M}_1(\widetilde{\Omega})$ est solution au *problème de martingale de* Fleming -Viot **recentré** avec condition initiale $\mu \in \mathcal{M}_1^{c,2}(\mathbb{R})$, si le processus canonique $(X_t)_{t\geqslant 0}$ sur $\widetilde{\Omega}$ satisfait $\mathbb{P}_\mu(X_0 = \mu) = 1$ et pour tous $F \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\widehat{M}_t^F(g) := F(\langle g, X_t\rangle) - F(\langle g, X_0\rangle) - \int_0^t F'(\langle g, X_s\rangle)\Bigg(\left\langle \frac{g''}{2}, X_s\right\rangle \\ + \gamma\left[\left\langle g'', X_s\right\rangle M_2(X_s) - 2\left\langle g' \times \mathrm{id}, X_s\right\rangle\right]\Bigg)\mathrm{d}s \\ - \gamma\int_0^t F''(\langle g, X_s\rangle)\Bigg[\left(\left\langle g^2, X_s\right\rangle - \langle g, X_s\rangle^2\right) \\ + \left\langle g', X_s\right\rangle^2 M_2(X_s) - 2\left\langle g', X_s\right\rangle\langle g\times \mathrm{id}, X_s\rangle\Bigg]\mathrm{d}s\end{aligned} \qquad (\blacklozenge\blacklozenge)$$

est une $\mathbb{P}_\mu-$martingale.

$\rightsquigarrow$ Les termes en bleu décrivent les effets dûs au recentrage.

(3)(a) Processus de Fleming-Viot - Existence (3/3)

Théorème [Existence]

Pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1^{c,2}(\mathbb{R})$, il existe une probabilité $\mathbb{P}_\mu \in \mathcal{M}_1\left(\widetilde{\Omega}\right)$ vérifiant $(\blacklozenge\blacklozenge)$.

(3)(a) Éléments de preuve pour l'existence (1/4)

$\rightsquigarrow$ Basée sur le problème de martingale (♦)

(0) On considère $Z_t := \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_t \rangle} \sharp Y_t$.
$\rightsquigarrow$ **Objectif.** Montrer que la loi de $(Z_t)_{t \geqslant 0}$ est solution de (♦♦).

(1) Décomposition en semi-martingale de DOOB de

$$F_g(Z_t) = F\left(\langle g, Z_t \rangle\right) = F\left(\left\langle g \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_t \rangle}, Y_t \right\rangle\right).$$

Attention ! $F\left(\left\langle g \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_t \rangle}, Y_t \right\rangle\right)$ n'est pas de la forme $H\left(\langle h, Y_t \rangle\right)$ avec h **déterministe**.

(2) Suite de subdivisions $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = T$ de $[0, T]$ de pas tendant vers 0 telle que, pour $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} F_g(Z_t) - F_g(Z_0) &= \sum_{i=0}^{p_n - 1} \left\{ F_g(Z_{t_{i+1}^n \wedge t}) - F_g(Z_{t_i^n \wedge t}) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{p_n - 1} \left\{ F\left(\left\langle g \circ \tau_{-\left\langle \mathrm{id}, Y_{t_{i+1}^n \wedge t} \right\rangle}, Y_{t_{i+1}^n \wedge t} \right\rangle\right) - F\left(\left\langle g \circ \tau_{-\left\langle \mathrm{id}, Y_{t_i^n \wedge t} \right\rangle}, Y_{t_i^n \wedge t} \right\rangle\right) \right\}. \end{aligned}$$

(3)(a) Éléments de preuve pour l'existence (2/4)

(3) Développements asymptotiques.

$$F_g(Z_t) - F_g(Z_0) = \sum_{i=0}^{p_n-1} \left\{ (\mathbf{A})_i + (\mathbf{B})_i + O\left(\left| \left\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_{i+1}\wedge t} - Y_{t^n_i \wedge t} \right\rangle \right|^3 + \sum_{k=0}^{2} \left| \left\langle g^{(k)} \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i\wedge t}\rangle}, Y_{t^n_{i+1}\wedge t} - Y_{t^n_i\wedge t} \right\rangle \right|^3 \right) \right\}$$

où

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A})_i = F'\left(\left\langle g \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i\wedge t}\rangle}, Y_{t^n_i\wedge t} \right\rangle \right) \Bigg\{ & \left\langle g \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i\wedge t}\rangle}, Y_{t^n_{i+1}\wedge t} - Y_{t^n_i\wedge t} \right\rangle \\
& - \left\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_{i+1}\wedge t} - Y_{t^n_i\wedge t} \right\rangle \times \left[\left\langle g' \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i\wedge t}\rangle}, Y_{t^n_i\wedge t} \right\rangle + \left\langle g' \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i\wedge t}\rangle}, Y_{t^n_{i+1}\wedge t} - Y_{t^n_i\wedge t} \right\rangle \right] \\
& + \frac{1}{2} \left\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_{i+1}\wedge t} - Y_{t^n_i\wedge t} \right\rangle^2 \left\langle g'' \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i\wedge t}\rangle}, Y_{t^n_i\wedge t} \right\rangle \Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B})_i = \frac{F''\left(\left\langle g \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i\wedge t}\rangle}, Y_{t^n_i\wedge t} \right\rangle \right)}{2} \Bigg\{ & \left\langle g \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i\wedge t}\rangle}, Y_{t^n_{i+1}\wedge t} - Y_{t^n_i\wedge t} \right\rangle^2 \\
& + \left\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_{i+1}\wedge t} - Y_{t^n_i\wedge t} \right\rangle^2 \left\langle g' \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i\wedge t}\rangle}, Y_{t^n_i\wedge t} \right\rangle^2 \\
& - 2 \left\langle g \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i\wedge t}\rangle}, Y_{t^n_{i+1}\wedge t} - Y_{t^n_i\wedge t} \right\rangle \left\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_{i+1}\wedge t} - Y_{t^n_i\wedge t} \right\rangle \left\langle g' \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i\wedge t}\rangle}, Y_{t^n_i\wedge t} \right\rangle \Bigg\}
\end{aligned}$$

(3)(a) Éléments de preuve pour l'existence (3/4)

(4) **Décomposition en semi-martingale de Doob de** $\langle \mathrm{id}, Y_t - Y_s \rangle$.

Dans (♦), $M^{\mathrm{id}}(g)$ est bien définie pour $g \in \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\rightsquigarrow$ **Extension**. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^{\mathrm{id}}\left(\mathrm{id}^k\right)$ est bien définie.

Lemme

Pour tout $\nu \in \mathcal{M}_1^k(\mathbb{R})$,

$$M_t^{\mathrm{id}}\left(\mathrm{id}^k\right) := \left\langle \mathrm{id}^k, Y_t \right\rangle - \left\langle \mathrm{id}^k, Y_0 \right\rangle - \int_0^t \left\langle \frac{k(k-1)}{2} \mathrm{id}^{k-2}, Y_s \right\rangle \mathrm{d}s, \quad k \geqslant 2,$$

est une $\mathbb{P}_\nu^{FV}-$martingale.

En particulier, les termes de la forme

$$\left\langle \mathrm{id}, Y_s - Y_{t_i^n \wedge t} \right\rangle = M_s^{\mathrm{id}}(\mathrm{id}) - M_{t_i^n \wedge t}^{\mathrm{id}}(\mathrm{id}), \qquad s \geqslant t_i^n \wedge t$$

font sens.

(3)(a) Éléments de preuve pour l'existence (4/4)

(5) Décomposition en semi-martingale de Doob de $\left\langle g^{(j)} \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_s \rangle}, Y_t - Y_s \right\rangle$, $j \in \{0, 1, 2\}$.

$$M^{\mathrm{id}}_{t^n_{i+1} \wedge t}\left(g^{(j)} \circ \tau_{-\left\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i \wedge t} \right\rangle}\right) - M^{\mathrm{id}}_{t^n_i \wedge t}\left(g^{(j)} \circ \tau_{-\left\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i \wedge t} \right\rangle}\right)$$

avec $j \in \{0, 1, 2\}$

(3)(a) Éléments de preuve pour l'existence (4/4)

(5) **Décomposition en semi-martingale de Doob de** $\left\langle g^{(j)} \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_s\rangle}, Y_t - Y_s \right\rangle$, $j \in \{0, 1, 2\}$.

$$\xcancel{M^{\mathrm{id}}_{t^n_{i+1} \wedge t}\left(g^{(j)} \circ \tau_{-\left\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i \wedge t}\right\rangle}\right) - M^{\mathrm{id}}_{t^n_i \wedge t}\left(g^{(j)} \circ \tau_{-\left\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i \wedge t}\right\rangle}\right)}$$

avec $j \in \{0, 1, 2\}$

(3)(a) Éléments de preuve pour l'existence (4/4)

(5) Décomposition en semi-martingale de Doob de $\left\langle g^{(j)} \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_s \rangle}, Y_t - Y_s \right\rangle$, $j \in \{0, 1, 2\}$.

$$\xcancel{M^{\mathrm{id}}_{t^n_{i+1} \wedge t}\left(g^{(j)} \circ \tau_{-\left\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i \wedge t} \right\rangle}\right) - M^{\mathrm{id}}_{t^n_i \wedge t}\left(g^{(j)} \circ \tau_{-\left\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i \wedge t} \right\rangle}\right)}$$

avec $j \in \{0, 1, 2\}$

$\rightsquigarrow$ Probabilités régulières conditionnelles[10,11]

[10] Ikeda-Watanabe (1987) - [11] Karatzas-Shreve (1991)

(3)(a) Éléments de preuve pour l'existence (4/4)

(5) Décomposition en semi-martingale de Doob de $\left\langle g^{(j)} \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_s \rangle}, Y_t - Y_s \right\rangle$, $j \in \{0,1,2\}$.

$$M^{\mathrm{id}}_{t^n_{i+1} \wedge t} \left(g^{(j)} \circ \tau_{-\left\langle \mathrm{id}, \omega|_{[0, t^n_i \wedge t]} \right\rangle} \right)(\omega) - M^{\mathrm{id}}_{t^n_i \wedge t} \left(g^{(j)} \circ \tau_{-\left\langle \mathrm{id}, \omega|_{[0, t^n_i \wedge t]} \right\rangle} \right)(\omega)$$

avec $j \in \{0,1,2\}$ qui sont des $\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)$−incréments de martingales sur Ω.
$\rightsquigarrow$ Probabilités régulières conditionnelles[10,11]

[10] Ikeda-Watanabe (1987) - [11] Karatzas-Shreve (1991)

(3)(a) Éléments de preuve pour l'existence (4/4)

(5) Décomposition en semi-martingale de Doob de $\left\langle g^{(j)} \circ \tau_{-\langle \mathrm{id}, Y_s \rangle}, Y_t - Y_s \right\rangle$, $j \in \{0,1,2\}$.

$$M^{\mathrm{id}}_{t^n_{i+1} \wedge t}\left(g^{(j)} \circ \tau_{-\left\langle \mathrm{id}, \omega|_{[0,t^n_i \wedge t]} \right\rangle} \right)(\omega) - M^{\mathrm{id}}_{t^n_i \wedge t}\left(g^{(j)} \circ \tau_{-\left\langle \mathrm{id}, \omega|_{[0,t^n_i \wedge t]} \right\rangle} \right)(\omega)$$

avec $j \in \{0,1,2\}$ qui sont des $\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)-$incréments de martingales sur Ω.

$\rightsquigarrow$ Probabilités régulières conditionnelles[10,11]

De plus, on a

$$\left\langle g^{(j)} \circ \tau_{-\left\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i \wedge t} \right\rangle}, Y_{t^n_{i+1} \wedge t} - Y_{t^n_i \wedge t} \right\rangle = \int_{t^n_i \wedge t}^{t^n_{i+1} \wedge t} \frac{1}{2} \left\langle g^{(j+2)} \circ \tau_{-\left\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i \wedge t} \right\rangle}, Y_s \right\rangle \mathrm{d}s$$
$$+ M^{\mathrm{id}}_{t^n_{i+1} \wedge t}\left(g^{(j)} \circ \tau_{-\left\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i \wedge t} \right\rangle} \right) - M^{\mathrm{id}}_{t^n_i \wedge t}\left(g^{(j)} \circ \tau_{-\left\langle \mathrm{id}, Y_{t^n_i \wedge t} \right\rangle} \right).$$

---

[10] Ikeda-Watanabe (1987) - [11] Karatzas-Shreve (1991)

(3)(b) Processus de Fleming-Viot - Unicité

Théorème [Unicité]

Le problème de martingale du Fleming-Viot recentré (♦♦) admet une unique solution.

(3)(b) Processus de Fleming-Viot - Unicité

Théorème [Unicité]

Le problème de martingale du Fleming-Viot recentré (♦♦) admet une unique solution.

$\rightsquigarrow$ **Méthode de dualité**[12,13,14]

[12] Dawson (1993) - [13] Etheridge (2000) - [14] Ethier-Kurtz (1987)

Éléments de preuve pour l'unicité (1/3)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$F(f,\mu) := \langle f, \mu^n \rangle = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) \mu(\mathrm{d}x_1) \dots \mu(\mathrm{d}x_n)$$

$$B^{(n)} f(x) := \frac{1}{2} \Delta f(x) - 2\gamma \left(\nabla f(x).\mathbf{1} \right) (x.\mathbf{1}), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Le générateur de Fleming-Viot recentré $\mathcal{L}_{FVc}$ appliqué aux fonctions $\mu \mapsto F(f,\mu)$ avec f fixé, vérifie :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{FVc} F(f,\mu) &= \left\langle B^{(n)} f, \mu^n \right\rangle + \gamma \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left[\left\langle \Phi_{i,j} f, \mu^{n-1} \right\rangle - \langle f, \mu^n \rangle \right] \\
&\quad + \gamma \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\left\langle K_{i,j} f, \mu^{n+1} \right\rangle - \langle f, \mu^n \rangle \right] + \gamma n^2 \langle f, \mu^n \rangle \\
&=: \widetilde{\mathcal{L}}_f^\star F(f,\mu) + \gamma n^2 \langle f, \mu^n \rangle
\end{aligned}$$

Éléments de preuve pour l'unicité (1/3)

Le générateur de FLEMING-VIOT recentré $\mathcal{L}_{FVc}$ appliqué aux fonctions $\mu \mapsto F(f,\mu)$ avec f fixé, vérifie :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{FVc}F(f,\mu) = \left\langle B^{(n)}f, \mu^n \right\rangle + \gamma \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left[\left\langle \Phi_{i,j}f, \mu^{n-1}\right\rangle - \left\langle f, \mu^n \right\rangle\right] \\ + \gamma \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left[\left\langle K_{i,j}f, \mu^{n+1}\right\rangle - \left\langle f,\mu^n\right\rangle\right] + \gamma n^2 \left\langle f, \mu^n\right\rangle \\ =: \widetilde{\mathcal{L}}_f^\star F(f,\mu) + \gamma n^2 \left\langle f, \mu^n\right\rangle\end{aligned}$$

où $\Phi_{i,j} : \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ est l'application obtenue à partir de f en remplaçant x_j par x_i et en renumérotant les variables :

$$\Phi_{i,j}f\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right) = f\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_i,x_j,x_{j+1},\ldots,x_{n-1}\right).$$

Éléments de preuve pour l'unicité (1/3)

Le générateur de Fleming-Viot recentré $\mathcal{L}_{FVc}$ appliqué aux fonctions $\mu \mapsto F(f,\mu)$ avec f fixé, vérifie :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{FVc}F(f,\mu) &= \left\langle B^{(n)}f,\mu^n\right\rangle + \gamma\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left[\left\langle \Phi_{i,j}f,\mu^{n-1}\right\rangle - \langle f,\mu^n\rangle\right] \\ &\quad + \gamma\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left\langle K_{i,j}f,\mu^{n+1}\right\rangle - \langle f,\mu^n\rangle\right] + \gamma n^2\langle f,\mu^n\rangle \\ &=: \widetilde{\mathcal{L}}_f^{\star}F(f,\mu) + \gamma n^2\langle f,\mu^n\rangle\end{aligned}$$

où $K_{i,j} : \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R})$ une application vérifiant

$$K_{i,j}f(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) := \partial_{ij}^2 f(x_1,\ldots,x_n)x_{n+1}^2.$$

Éléments de preuve pour l'unicité (1/3)

Le générateur de FLEMING-VIOT recentré $\mathcal{L}_{FVc}$ appliqué aux fonctions $\mu \mapsto F(f,\mu)$ avec f fixé, vérifie :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{FVc}F(f,\mu) &= \left\langle B^{(n)}f, \mu^n \right\rangle + \gamma \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left[\left\langle \Phi_{i,j}f, \mu^{n-1}\right\rangle - \langle f, \mu^n\rangle\right] \\ &\quad + \gamma \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left\langle K_{i,j}f, \mu^{n+1}\right\rangle - \langle f,\mu^n\rangle\right] + \gamma n^2 \langle f, \mu^n\rangle \\ &=: \widetilde{\mathcal{L}}_f^{\star} F(f,\mu) + \gamma n^2 \langle f, \mu^n\rangle\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Suggère d'introduire un **processus dual** $(\xi_t)_{t\geqslant 0}$ [15,16]

[15] ETHIER-KURTZ (1987) - [16] ETHIER-KURTZ (1993)

Éléments de preuve pour l'unicité (1/3)

Le générateur de Fleming-Viot recentré $\mathcal{L}_{FVc}$ appliqué aux fonctions $\mu \mapsto F(f,\mu)$ avec f fixé, vérifie :

$$\mathcal{L}_{FVc}F(f,\mu) = \left\langle B^{(n)}f, \mu^n \right\rangle + \gamma \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left[\left\langle \Phi_{i,j}f, \mu^{n-1}\right\rangle - \langle f, \mu^n\rangle\right]$$
$$+ \gamma \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left[\left\langle K_{i,j}f, \mu^{n+1}\right\rangle - \langle f,\mu^n\rangle\right] + \gamma n^2 \langle f, \mu^n\rangle$$
$$=: \widetilde{\mathcal{L}}^{\star}_{f} F(f,\mu) + \gamma n^2 \langle f, \mu^n\rangle$$

$\rightsquigarrow$ Suggère d'introduire un **processus dual** $(\xi_t)_{t\geqslant 0}$ [15,16] et de prouver une **relation de dualité** de la forme:

$$\forall t \geqslant 0, \quad \mathbb{E}\left(\left\langle \xi_0, Z_t^{M(0)}\right\rangle\right) = \mathbb{E}\left(\left\langle \xi_t, Z_0^{M(t)}\right\rangle \exp\left(\gamma\int_0^t M^2(u)\mathrm{d}u\right)\right)$$

---

[15] Ethier-Kurtz (1987) - [16] Ethier-Kurtz (1993)

Éléments de preuve pour l'unicité (1/3)

Le générateur de Fleming-Viot recentré $\mathcal{L}_{FVc}$ appliqué aux fonctions $\mu \mapsto F(f,\mu)$ avec f fixé, vérifie :

$$\mathcal{L}_{FVc}F(f,\mu) = \left\langle B^{(n)}f, \mu^n \right\rangle + \gamma \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left[\left\langle \Phi_{i,j}f, \mu^{n-1}\right\rangle - \langle f, \mu^n\rangle\right]$$

$$+ \gamma \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left[\left\langle K_{i,j}f, \mu^{n+1}\right\rangle - \langle f,\mu^n\rangle\right] + \gamma n^2 \langle f, \mu^n\rangle$$

$$=: \widetilde{\mathcal{L}}^{\star}_{f} F(f,\mu) + \gamma n^2 \langle f, \mu^n\rangle$$

Étape 1. Construction du processus dual. ■ $(\xi_t)_{t\geqslant 0}$ saute

- pour tous i,j de $f \in \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ vers $K_{i,j}f \in \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R})$ à taux γ
- pour tous $i \neq j$ de $f \in \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ vers $\Phi_{i,j}f \in \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R})$ à taux γ.

■ $(\xi_t)_{t\geqslant 0}$ évolue selon le semi-groupe $\left(T^{(n)}(t)\right)_{t\geqslant 0}$ associé à $B^{(n)}$.

(3)(b) Éléments de preuve pour l'unicité (2/3)

Soit $M := (M(t))_{t\geqslant 0}$ PNM de taux de transitions :

(1) $q_{n,n+1} = \gamma n^2$ **(2)** $q_{n,n-1} = \gamma n(n-1)$ **(3)** $q_{i,j} = 0$ sinon.

(3)(b) Éléments de preuve pour l'unicité (2/3)

Soit $M := (M(t))_{t\geqslant 0}$ PNM de taux de transitions :

(1) $q_{n,n+1} = \gamma n^2$ **(2)** $q_{n,n-1} = \gamma n(n-1)$ **(3)** $q_{i,j} = 0$ sinon.

Définition (Processus dual)

Pour tout $M(0) \in \mathbb{N}^\star$, *pour tout* $\xi_0 \in \mathscr{C}_b^2\left(\mathbb{R}^{M(0)}, \mathbb{R}\right)$,

$$\xi_t := T^{(M(\tau_n))}(t-\tau_n)\,\Gamma_n T^{(M(\tau_{n-1}))}(\tau_n - \tau_{n-1})\,\Gamma_{n-1}\dots\Gamma_1 T^{(M(0))}(\tau_1)\,\xi_0, \qquad \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1},\ n \in \mathbb{N},$$

où • $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite des temps de sauts de* M *avec* $\tau_0 = 0$
• $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'opérateur aléatoire vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall i \neq j, \quad \mathbb{P}\left(\Gamma_k = \Phi_{i,j} \,\middle|\, M\right) = \frac{1}{n^2 + n(n-1)}$$

sur $\left\{M\left(\tau_k^-\right) = n, M(\tau_k) = n-1\right\}$, *et*

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall i, j, \quad \mathbb{P}\left(\Gamma_k = K_{i,j} \,\middle|\, M\right) = \frac{1}{n^2 + n(n-1)},$$

sur $\left\{M\left(\tau_k^-\right) = n, M(\tau_k) = n+1\right\}$.

(3)(b) Éléments de preuve pour l'unicité (3/3)

Étape 2. Relation de dualité affaiblie. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit le temps d'arrêt

$$\theta_k := \inf \left\{ t \geqslant 0 \,\middle|\, M(t) \geqslant k \quad \text{ou} \quad \exists s \in [0,t],\ \left\langle \xi_s, Z_{t-s}^{M(s)} \right\rangle \geqslant k \right\}.$$

Théorème [Identité de dualité affaiblie]

Soit $(Z_t)_{t \geqslant 0}$ dont la loi $\mathbb{P}_\mu$ est solution au problème de martingale (♦♦). Soit $(\xi_t)_{t \geqslant 0}$ défini comme ci-dessus, construit sur le même espace de probabilité que $(Z_t)_{t \geqslant 0}$, et indépendant de $(Z_t)_{t \geqslant 0}$.

On a l'*identité de dualité affaiblie*: pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout temps d'arrêt θ tel que $\theta \leqslant \theta_k$,

$$\forall t \geqslant 0, \quad \mathbb{E}_{(\mu,\xi_0)}\left(\left\langle \xi_0, Z_{t\wedge\theta}^{M(0)} \right\rangle \right)$$
$$= \mathbb{E}_{(\mu,\xi_0)}\left(\left\langle \xi_{t\wedge\theta}, Z_0^{M(t\wedge\theta)} \right\rangle \exp\left(\gamma \int_0^{t\wedge\theta} M^2(u)\mathrm{d}u \right) \right).$$

(3)(c) Ergodicité

(1) Processus de Moran - Généalogie de Kingman[17,18]

- Processus de Moran *neutre* à N individus : $\left(Y_t^N\right)_{t\geqslant 0}$
- Généalogie associée : $N-$coalescent de Kingman

$\rightsquigarrow$ Construction de deux versions : $\left(\widetilde{Y}_t^{N,\mu}\right)_{t\geqslant 0}$ resp. $\left(\widetilde{Y}_t^{N,\nu}\right)_{t\geqslant 0}$

$\rightsquigarrow$ Construction de leur recentrage associé : $\left(\widetilde{Z}_t^{N,\mu}\right)_{t\geqslant 0}$ resp. $\left(\widetilde{Z}_t^{N,\nu}\right)_{t\geqslant 0}$

(2) Résultats

Théorème [Ergodicité du processus particulaire recentré sans sélection]

Soient $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^2(\mathbb{R})$. Il existe une constante $C(N)$ telle que

$$\left\|\mathcal{L}_\mu\left(Z_T^N\right) - \mathcal{L}_\nu\left(Z_T^N\right)\right\|_{VT} \leqslant C(N)e^{-T}.$$

[17] Etheridge (2011) - [18] N. Berestycki (2009)

Merci !

Merci de votre attention !