Approximation aux premier et second ordres des intégrales stochastiques fractionnaires

Valentin Garino
en collaboration avec Ivan Nourdin et Pierre Vallois

Université du Luxembourg

22/06/2021

1. **Introduction**

2. **Mouvement brownien fractionnaire**
   - Définition
   - Intégrale stochastique

3. **Résultats principaux: cas particulier**
   - Enoncé
   - Eléments de preuve

4. **Résultats principaux: cas général**
   - Enoncé
   - Exemples

Introduction

Illustration: Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On a:

$$
\begin{aligned}
& n\left(\int_0^1 f(s)ds - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\
= \quad & n\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(f(s) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)ds \\
\approx \quad & n\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(s - \frac{k}{n}\right)ds \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\int_0^1 f'(s)ds.
\end{aligned}
$$

Theorem (Rootzen (1980))

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et B un mouvement brownien standard. Il existe un mouvement brownien $W \perp\!\!\!\perp B$ tel que:

$$
\sqrt{n}\left(\int_0^1 f(B_s)dB_s - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(B_{\frac{k}{n}}\right)\left(B_{\frac{k+1}{n}} - B_{\frac{k}{n}}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \int_0^1 \frac{f'(B_s)}{\sqrt{2}}dW_s
$$

mouvement brownien fractionnaire

Definition

Soient $H \in (0,1)$ et $T > 0$. Le mouvement fractionnaire $(B_t)_{t \in [0,T]}$ d'indice H est l'unique processus gaussien tel que:

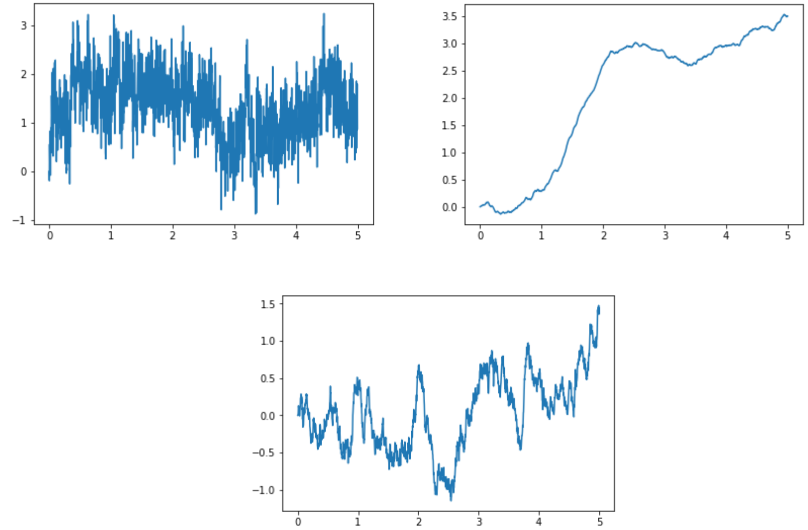
- $B_0 = 0$ $p.s.$
- B est presque sûrement continu
- $\forall t, s \in [0, T], \mathbb{E}[B_t] = 0, \mathbb{C}ov(B_t, B_s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$.

En particulier, $\mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right] = |t-s|^{2H}$.

Lorsque $H = \frac{1}{2}$, on retrouve la fonction de covariance du mouvement brownien standard:

$$\mathbb{C}ov(B_t, B_s) = \min(s, t).$$

Mouvement brownien fractionnaire



De gauche à droite: $H = 0.1, H = 0.5, H = 0.9$

Mouvement brownien fractionnaire

Theorem (Young 1936)

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telles que f (resp g) est α (resp β)-Holder continue, avec $\alpha + \beta > 1$.

- *Pour $a < b$, la suite*

$$S_n(f,g) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k(b-a)}{n}\right)\left(g\left(\frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) - g\left(\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$$

  converge vers une limite, notée $\int_a^b fdg$.

- *De plus, il existe une constante K ne dépendant que de α, β telle que*

$$\left|\int_a^b fdg - f(a)(g(b) - g(a))\right| \leq K\|f\|_\alpha \|g\|_\beta (b-a)^{\alpha+\beta}$$

Mouvement brownien fractionnaire

- Comme le mouvement brownien fractionnaire B est p.s. β-Holderien pour tout $\beta < H$, on peut définir trajectoriellement l'intégrale $\int_a^b u_s dB_s$ si u est α-Holderien avec $\alpha > 1 - H$ par:

$$\forall \omega \in \Omega, \left(\int_a^b u_s dB_s \right)(\omega) = \lim_{n \to \infty} S_n(u(\omega), B(\omega)).$$

- Si $H > \frac{1}{2}$ et si f est lipschitzienne, l'intégrale

$$\int_a^b f(B_s) dB_s$$

  est bien définie.

- L'intégrale précédente vérifie la formule de changement de variables:

$$f(B_s) = f(0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s.$$

Résultats principaux: cas particulier

Soient $H > \frac{1}{2}$, $f \in \mathcal{C}_b^2$ et $(u_s)_{s\in[0,T]} = (f(B_s))_{s\in[0,T]}$. Supposons que $T = 1$.

Theorem

1) Convergence au premier ordre

$$S_n = n^{2H-1}\left(\int_0^1 u_s dB_s - \sum_{i=0}^{n-1} u_{\frac{i}{n}}\left(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \frac{1}{2}\int_0^1 f'(B_s)ds.$$

2) Convergence au second ordre

- *Si* $\frac{1}{2} < H < \frac{3}{4}$,

$$\sqrt{n}\left(S_n - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(B_s)ds\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \frac{\sigma_H}{2}\int_0^1 f'(B_s)dW_s,$$

  avec W *un mouvement brownien standard* $(H = \frac{1}{2})$ *indépendant de* B *et* σ_H *une constante positive.*

Résultats principaux : cas particulier

Theorem

- *Si* $H = \frac{3}{4}$,

$$\sqrt{\frac{n}{\log(n)}}\left(S_n - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(B_s^H)ds\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \frac{\sigma_{\frac{3}{4}}}{2}\int_0^1 f'(B_s)dW_s.$$

- *Si* $1 > H > \frac{3}{4}$,

$$n^{2-2H}\left(S_n - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(B_s)ds\right) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\Omega)} \int_0^1 f'(B_s)dR_s^{2H-1},$$

où R^{2H-1} *est le processus de Rosenblatt d'ordre de paramètre* $2H-1$.

Résultats principaux: cas particulier

1) *Preuve de*:

$$S_n = n^{2H-1}\left(\int_0^1 u_s dB_s - \sum_{i=0}^{n-1} u_{\frac{i}{n}}\left(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \frac{1}{2}\int_0^1 f'(B_s)ds.$$

On a:

$$\begin{aligned}
S_n &= n^{2H-1}\int_0^1 \left(u_s - u_{\frac{\lfloor ns\rfloor}{n}}\right) dB_s = A_n + R_n \\
A_n &= n^{2H-1}\sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{\frac{i}{n}}) \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \left(B_s - B_{\frac{i}{n}}\right) dB_s \\
R_n &= n^{2H-1}\int_0^1 \left(u_s - u_{\frac{\lfloor ns\rfloor}{n}} - f'(B_{\frac{\lfloor ns\rfloor}{n}})\left(B_s - B_{\frac{\lfloor ns\rfloor}{n}}\right)\right) dB_s.
\end{aligned}$$

On peut montrer simplement que $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 0$ en utilisant la formule de changement de variables.

Résultats principaux: cas particulier

Lemma

$$\forall s \leq t \leq 1,\ Q_n(s,t) = n^{2H-1} \sum_{i=\frac{\lfloor ns \rfloor}{n}}^{\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}} \left(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}} \right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} (t-s)$$

- Un argument d'approximation combiné avec le lemme précédent permet de montrer que pour tout processus continu borné p,

$$n^{2H-1} \sum_{i=\frac{\lfloor ns \rfloor}{n}}^{\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}} p_{\frac{i}{n}} \left(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}} \right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \int_s^t p_u du$$

- Pour $H > \frac{1}{2}$, la formule de changement de variables permet d'écrire:

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{\frac{i}{n}}) \int_0^1 \left(B_s - B_{\frac{i}{n}} \right) dB_s = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{\frac{i}{n}}) \left(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}} \right)^2 .$$

Résultats principaux: cas particulier

2) Preuve de:

$$\sqrt{n}\left(S_n - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(B_s)ds\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \frac{\sigma_H}{2}\int_0^1 f'(B_s)dW_s.$$

Theorem (Breuer-Major,1983)

Soit $F_n^2(s,t) = \sum_{i=\frac{\lfloor ns\rfloor}{n}}^{\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}} \left(n^{2H}\left(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right)^2 - 1\right)$. *Si* $0 < H < 1 - \frac{2}{4}$,

$$\left(B, n^{-\frac{1}{2}}F_n^2(s,t)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \left(B, \sigma_{H,q}(W_t - W_s)\right),$$

avec W *mouvement brownien standard indépendant de* B.

Résultats pricipaux: cas particulier

Theorem (Taqqu, 1979)

Si $H > \frac{3}{4}$,

$$n^{1-2H} F_n^2(s,t) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\Omega)} R_t^{2H-1} - R_s^{2H-1}.$$

R^β *est appelé le processus de Rosenblatt d'indice* β.

- R^β est auto-similair d'ordre β, α-Holderien pour $\alpha < \beta$ et possède des accroissements stationnaires.
- R^β **n'est pas gaussien.**

Résultats principaux: cas particulier

- Si $\frac{1}{2} < H < \frac{3}{4}$,

$$\sqrt{n}\left(S_n - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(B_s)ds\right)$$

$$= \frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{\frac{i}{n}})H_2\left(n^H\left(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right)\right) + R_n^1.$$

avec $R_n^1 \xrightarrow[n\infty]{L^2} 0$

- Un argument d'approximation dû à Nourdin, Nualart and Tudor (2010) permet d'obtenir la convergence:

$$n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{\frac{i}{n}})\left(n^{2H}\left(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right)^2 - 1\right) \xrightarrow[n\to 0]{\mathcal{L}} \sigma_{H,q}\int_0^1 f'(B_s)dW_s.$$

- Raisonnement similaire pour $H > \frac{3}{4}$.

Résultats principaux: cas général

- Rappel: Pour $u_s = f(B_s)$

$$
\begin{aligned}
S_n &= n^{2H-1} \int_0^1 \left(u_s - u_{\frac{\lfloor ns \rfloor}{n}} \right) dB_s = A_n + R_n \\
A_n &= n^{2H-1} \sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{\frac{i}{n}}) \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \left(B_s - B_{\frac{i}{n}} \right) dB_s^H \\
R_n &= n^{2H-1} \int_0^1 \left(u_s - u_{\frac{\lfloor ns \rfloor}{n}} - f'(B^H_{\frac{\lfloor ns \rfloor}{n}}) \left(B_s - B_{\frac{\lfloor ns \rfloor}{n}} \right) \right) dB_s.
\end{aligned}
$$

- Par quoi remplacer f' en général?

Résultats principaux: cas général

Soient u, v deux processus intégrables par rapport à B, et pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$L_{s,t}(u,v) = \int_s^t (u_l - u_s - v_s(B_l - B_s))dB_l.$$

Definition

- On dit que le processus P est un pseudo-contrôle pour u si $L_{s,t}(u,P)$ converge vers 0 (en un certain sens technique) à une vitesse appropriée quand $s \to t$.
- Le processus P est unique à un ensemble de mesure nulle près.
- Selon la vitesse de convergence , on dit alors que le couple (u,P) appartient à l'ensemble $\mathbb{C}_1$ ou à l'ensemble $\mathbb{C}_2$.

Résultats principaux: cas général

Definition

- Si $\forall s \leq t, x \leq y$

$$\mathbb{E}[L_{s,t}(u,P)L_{x,y}(u,P)] = o_{|t-s|+|x-y|\to 0} f_H^1(s,t,x,y)$$

  Alors $(u,P) \in \mathbb{C}^1$
- Si $\forall s \leq t, x \leq y$

$$\mathbb{E}[L_{s,t}(u,P)L_{x,y}(u,P)] = o_{|t-s|+|x-y|\to 0} f_H^2(s,t,x,y)$$

  Alors $(u,P) \in \mathbb{C}^2$

Résultats principaux: cas général

Theorem

1) Convergence au premier ordre: Si $(u, P) \in \mathbb{C}_1$, *alors:*

$$S_n = n^{2H-1}\left(\int_0^1 u_s dB_s - \sum_{i=0}^{n-1} u_{\frac{i}{n}}\left(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \frac{1}{2}\int_0^1 P_s ds.$$

2) Convergence au second ordre: si $(u, P) \in \mathbb{C}_2$ *et* u, P *sont* α *(resp* β*) Holderiens avec* $\alpha, \beta > 1 - H$, *alors:*

- *Si* $H < \frac{3}{4}$,

$$\sqrt{n}\left(S_n - \frac{1}{2}\int_0^1 P_s ds\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \frac{\sigma_H}{2}\int_0^1 P_s dW_s.$$

Résultats principaux: cas général

Theorem

- *Si* $H = \frac{3}{4}$,

$$\sqrt{\frac{n}{\log(n)}}\left(S_n - \frac{1}{2}\int_0^1 P_s ds\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \frac{\sigma_{\frac{3}{4}}}{2}\int_0^1 P_s dW_s.$$

- *Si* $1 > H > \frac{3}{4}$,

$$n^{2-2H}\left(S_n - \frac{1}{2}\int_0^1 P_s ds\right) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\Omega)} \int_0^1 P_s dR_s^{2H-1}.$$

Résultats principaux: cas général

Exemples:

- Si $u_s = f(B_s)$ et $P_s = f'(B_s)$ avec $f \in C_b^2$, alors $(u, P) \in \mathbb{C}_2$.
- Si $u_s = U_0 + \int_0^s a_s dB_s$ et $P_s = a_s$ (avec a suffisamment régulier), alors $(u, P) \in \mathbb{C}_2$.
- Plus généralement, si $(u, P) \in \mathcal{D}^{2\kappa}$ $\forall \kappa < H$ avec $\mathcal{D}^{2\kappa}$ l'ensemble des processus contrôlés au sens de Gubinelli, $(u, P) \in \mathbb{C}_2$
- **Cas irrégulier** Soient $u_s = |B_s|$, $P_s = sgn(B_s)$. Alors si $\frac{1}{2} < H < \frac{2}{3}$, $(u, P) \in \mathbb{C}^1$

Résultats principaux: cas général

Theorem (intégrales de Wiener multiples)

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, g *une fonction symétrique dans* $\left(L^2([0,T])\right)^k$,

$$f : (x_1, \ldots, x_k, s) \to g(x_1, \ldots, x_k)\mathbb{I}_{[0,s]}(x_1, \ldots, x_k)$$

$$\begin{aligned} u_s &= \delta^k(f(\cdot, s)) \\ P_s &= k\delta^{k-1}(f(\cdot, s, s)). \end{aligned}$$

Alors:

- $(u, P) \in \mathbb{C}_1$
- *Si* $H \leq \frac{3}{4}$, $(u, P) \in \mathbb{C}_2$

Résultats principaux: cas général

Preuve:

- Pour montrer la continuité Holderienne, on utilise la propriété d'hypercontractivité:

$$\mathbb{E}[\left(\delta^k(g_k)\right)^p] \leq C_{k,p} \|g_k\|^{\frac{p}{2}}_{L^2([0,T]^k)}.$$

  et le critère de Kolmogorov
- Pour montrer que $(u, P) \in \mathbb{C}^i, i \in \{1, 2\}$, on utilise le résultat suivant:

Theorem (Alos,Nualart (2002))

Soit $u \in \mathbb{D}^{1,2}$ intégrable au sens de Young. On a $\forall t > 0$,

$$\int_0^t u_s dB_s = \delta(u) + H(2H-1) \int_0^t \int_0^t D_l u_s |l - s|^{2H-2} dl ds$$