"Spiking" et "Collapsing" d'EDS à grand bruit

Reda Chhaïbi
- travail en commun avec Cédric Bernardin, Raphael Chetrite, Joseph Najnudel, Clément Pellegrini

Institut de Mathématiques de Toulouse, France

23rd of June 2021 - Guidel, Bretagne

Sommaire

Cadre

En probabilités, les limites de bruit faible ont une longue histoire (Freidlin-Wentzell, Grandes déviations).

Ici nous nous intéressons à des EDS sur $\mathbb{R}$ de la forme:

$$\begin{array}{rcl} X_0^\gamma & = & x_0 \\ dX_t^\gamma & = & b(X_t^\gamma)dt + \sqrt{\gamma}\sigma(X_t^\gamma)dW_t , \end{array}$$

et analyser la limite $\gamma \to \infty$.

Exemple expérimental issu de la mesure quantique

Bain thermique

Selon Bauer, Bernard et Tilloy, on peut considérer un système quantique à deux états E_0, E_1.

$\frac{1}{k_B T} = \beta$

$$X_t^\gamma = \mathbb{P}\left(\text{Mesure directe } E(t) = E_0\right) \ .$$

Dessin:

Mesure indirecte dessus

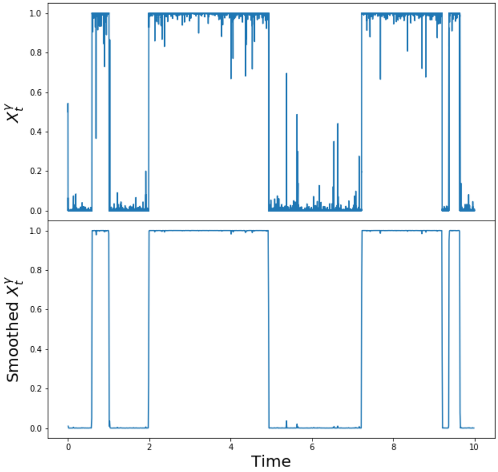
$$p = \frac{e^{-\beta E_0}}{e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_1}}$$

En fait, une théorie de filtrage quantique / systèmes quantiques ouverts donne:

$$dX_t^\gamma = \underbrace{-\lambda}_{\text{Vitesse de retour à l'éq.}}(X_t^\gamma - p)dt + \underbrace{\sqrt{\gamma} X_t^\gamma(1 - X_t^\gamma)}_{\text{Bruit s'annule en } \{0,1\}} dW_t \ ,$$

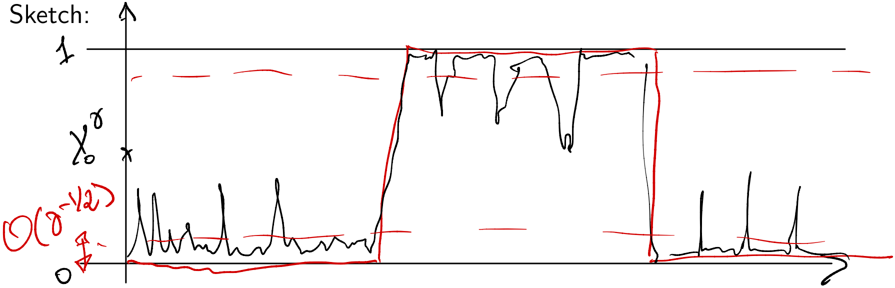
Exemple expérimental issu de la mesure quantique (II)

On observe



Commentaires

Sketch:



Il semble y avoir:

- un processus de sauts métastable entre les états $\{0, 1\}$. (Markov?). Collapse local cohérent avec l'axiomatique du réduction du paquet d'ondes.
- la plupart du temps, le processus vit dans un petit film en $\mathcal{O}(\gamma^{\frac{1}{2}})$ au voisinage de 0 et 1.
- Décoration par des spikes très fin.

Questions

- *comment formaliser les phénomènes décrits? Phénomènes ou processus?*
- *peut-on écrire un théorème limite?*

Prérequis: Il faut nécessairement distinguer

- la convergence vers le processus à saut dans une topologie faible après lissage.
- la convergence vers le processus à spikes dans une topologie forte, et exotique?

Sommaire

Hypothèses

$$dX_t^\gamma = b(X_t^\gamma)\, dt + \sqrt{\gamma}\, \sigma(X_t^\gamma)\, dW_t$$

Dans toute la suite, nous supposerons au sujet de (b, σ) qu'elles sont toutes les deux lisses et:

- le bruit s'annule seulement en 0 et 1:

$$\sigma(0) = \sigma(1) = 0 \quad ; \; \forall 0 < x < 1, \; \sigma(x) > 0 \; .$$

- le drift est entrant:

$$b(0) > 0 \; ; \; b(1) < 0 \; .$$

  Ainsi quand le bruit s'annule, le drift "ramène la diffusion à l'intérieur".

La topologie de Hausdorff

Dans le but de capturer la convergence de graphes $\subset \mathbb{R}^2$ vers des spikes, définissons la topologie de Hausdorff sur

$$F(\mathbb{R}^2) := \{X \subset \mathbb{R}^2 \mid X \text{ fermé}\} \,,$$

induite par la distance:

$$d_{\mathbb{H}}(X, Y) = \inf \{\, \varepsilon > 0 \mid X \subset Y + \varepsilon\mathbb{B},\ Y \subset X + \varepsilon\mathbb{B}\}$$

X, Y fermés

$$\mathbb{B} = B_{\mathbb{R}^2}(0, 1)$$

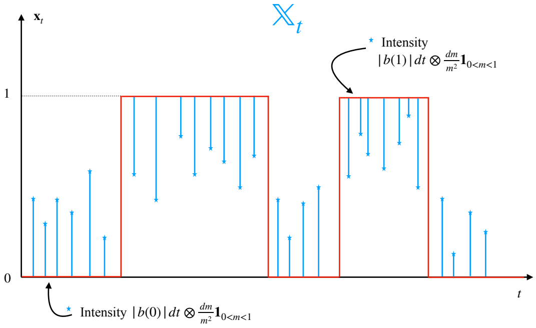
Les objets

Deux processus:

1. Définissons $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_t; t \geq 0)$ le processus de Markov à saut sur $\{0, 1\}$, avec pour intensités de transitions:

$$L^{0,1} = |b(0)| \ , \quad L^{1,0} = |b(1)| \ .$$

2. Définissons le processus de spikes comme le processus à valeurs dans les parties de $[0, 1]$, $\mathbb{X} : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{P}([0, 1])$ obtenu comme suit:



Le théorème

Theorem

Il est possible de coupler X^γ à la paire $(\mathbb{X}, \mathrm{x})$ pour différents $\gamma \overset{>}{\cancel{<}} 1$, de façon à ce que les convergences suivantes aient lieu presque sûrement:

- *pour toute fonction continue à support compact $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a:*

$$\lim_{\gamma \to \infty} \int_0^\infty dt \ f(t, X_t^\gamma) = \int_0^\infty dt \ f(t, \mathrm{x}_t) \ .$$

- *Dans le sens de la convergence de Hausdorff pour les graphes, on a la convergence sur tout horizon $H > 0$:*

$$\lim_{\gamma \to \infty} \{(t, X_t^\gamma) \ ; \ 0 \leq t \leq H\} = \{(t, \mathbb{X}_t) \ ; \ 0 \leq t \leq H\} \ .$$

Sommaire

Idée 1

« Toute diffusion en dim 1 est un brownien changé de temps et d'espace »

h_γ = Fonct° d'échelle = une solut° de

$$\frac{1}{2}\sigma^2 h_\gamma'' + b(x) h_\gamma' = 0$$

$$X_t^\gamma = h_\gamma^{\langle -1 \rangle}\Big(\underbrace{h_\gamma(X_t^\gamma)}_{\beta_{T_t^\gamma}}\Big)$$

β mouvement brownien DDS.

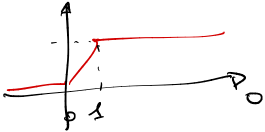
T_t^γ ← changement de temps.

⚠ Couplage :

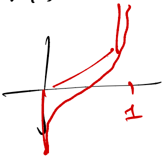
Prendre le même β et construire T^γ, puis X^γ à partir de β.

Idée 2 : Asymptotiques à $\gamma \to +\infty$ avec des excursions.

· $h_\gamma^{(-1)} \xrightarrow[\gamma \to +\infty]{}$



l_γ :



· $T_t^\gamma \xrightarrow[\gamma \to +\infty]{} \sigma_t = \inf \left\{ \ell \geq 0 \;\middle|\; \frac{L_\ell^0(\beta)}{2|b(0)|} + \frac{L_\ell^1(\beta)}{2|b(1)|} > t \right\}$

· Suivre les excursions de β entre les instants d'augmentation du temps local.

⚠ Les spikes ne sont que des excursions entre 0 & 1, "écrasées" par un changement de temps singulier.

Ouvertures

Etrangement, les bruits forts ont beaucoup plus d'universalité que les bruits faibles, avec une réponse plutôt complète en dim 1.

Mais ce drôle de phénomène de "spiking" et "collapsing" nous laisse encore du travail:

- en théorie du filtrage classique, avec le filtre de Shiryaev-Wonham.
- en trajectoires quantiques, en dim > 1. La convergence lissée est bien mieux comprise que les spikes, qui reste une question ouverte.
- question de physique fondamentale: comment modérer l'axiome de réduction du paquet d'onde en mécanique quantique?

Remerciements

Merci de votre attention!