Le mouvement Brownien itéré ad libitum n'est pas le pseudo-arc

Jérôme Casse
avec Nicolas Curien

Laboratoire Mathématiques d'Orsay

Journées de Probabilités 2021
22 juin 2021

C'est quoi ce titre ?

Le mouvement Brownien itéré ad libitum
n'est pas le pseudo-arc

C'est quoi ce titre ?

Le mouvement Brownien itéré ad libitum
n'est pas le pseudo-arc

C'est quoi ce titre ?

Le mouvement Brownien itéré ad libitum
n'est pas le pseudo-arc

- Le mouvement Brownien : OK

C'est quoi ce titre ?

Le mouvement Brownien itéré ad libitum
n'est pas le pseudo-arc

- Le mouvement Brownien : OK
- itéré : mouais

C'est quoi ce titre ?

Le mouvement Brownien itéré ad libitum
n'est pas le pseudo-arc

- Le mouvement Brownien : OK
- itéré : mouais
- ad libitum : du latin ?

C'est quoi ce titre ?

Le mouvement Brownien itéré ad libitum
n'est pas le pseudo-arc

- Le mouvement Brownien : OK
- itéré : mouais
- ad libitum : du latin ?
- pseudo-arc : c'est quoi ça ?

C'est quoi ce titre ?

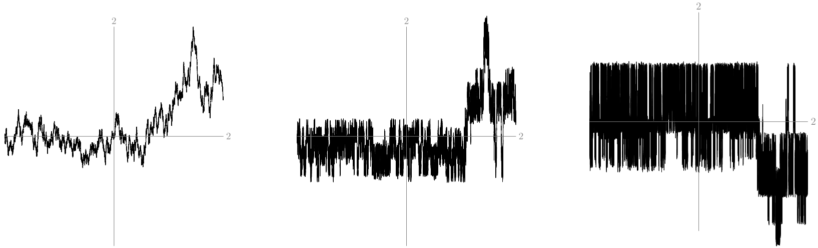
Le mouvement Brownien itéré ad libitum
n'est pas le pseudo-arc

- Le mouvement Brownien : OK
- itéré : mouais
- ad libitum : du latin ?
- pseudo-arc : c'est quoi ça ?
  - C'est un peu de topologie.

Mouvement brownien itéré ad libitum

- $(B_i)_{i\geq 1}$ suite de mouvements brownien bilatères indépendants.
- Le mouvement brownien itéré n fois est

$$I^{(n)}(t) = (B_1 \circ B_2 \circ \cdots \circ B_n)\,(t).$$

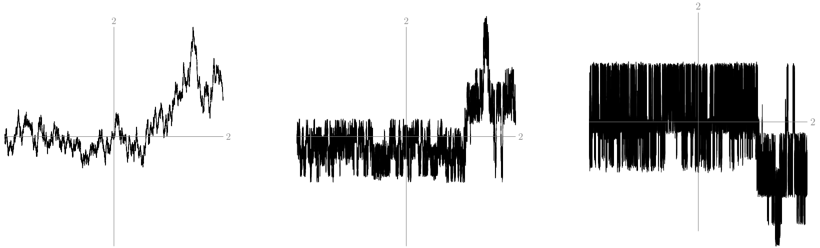


- Itéré 2 fois $I^{(2)}$ beaucoup étudié à la fin des années 90. [Funaki 79] [Burdzy 92] [Burdzy, Khoshnevisan 95] [Bertoin 96] [Xiao 98] [Eisenbaum, Shi 99] [Khoshnevisan, Lewis 99]

Mouvement brownien itéré ad libitum

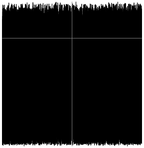
- $(B_i)_{i\geq 1}$ suite de mouvements brownien bilatères indépendants.
- Le mouvement brownien itéré n fois est

$$I^{(n)}(t) = (B_1 \circ B_2 \circ \cdots \circ B_n)(t).$$

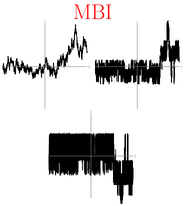


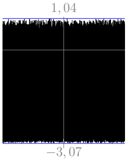
- Itéré 2 fois $I^{(2)}$ beaucoup étudié à la fin des années 90.
- Quand $n \to \infty$, c'est le mouvement brownien itéré ad libitum I.

4 fun facts sur le MBI ad libitum (le 2ème va vous étonner)



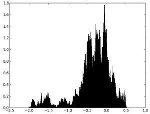
Convergence fonctionnelle ?



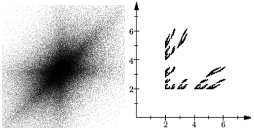


Bornitude ?

Mesure d'occupation
Temps local



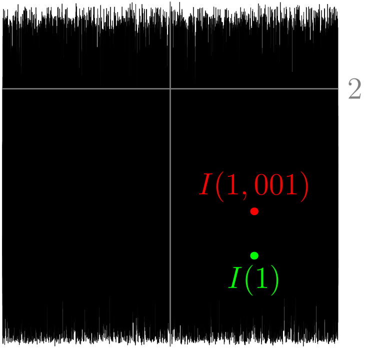
Finies-dimensionelles
Convergence ? Description ?



4 fun facts sur le MBI ad libitum (le 2ème va vous étonner)

Convergence fonctionnelle ? NON [Turban 04] [Curien-Konstantopoulos 14]

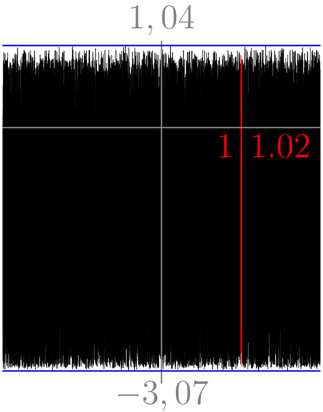
- I est continu nulle part.
- $\forall t \neq 0$, $I(t)$ suit une loi de Laplace.
- $\forall t_1, t_2$, $I(t_1) - I(t_2)$ suit une loi de Laplace.



4 fun facts sur le MBI ad libitum (le 2ème va vous étonner)

Bornitude ? OUI et même mieux [Curien-Konstantopoulos 14]

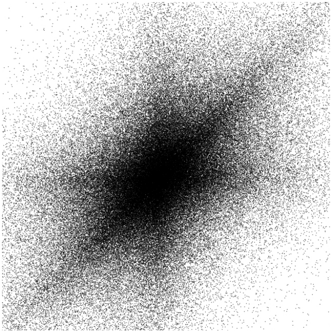
- $\exists J_1$ sous-intervalle de $\mathbb{R}$, $I(t) \in J_1$.
- Loi de J_1 ? Connu, mais n'est pas une loi simple.
- $\forall J_2$ sous-intervalle de $\mathbb{R}$, $I(J_2) = J_1$.



4 fun facts sur le MBI ad libitum (le 2ème va vous étonner)

Finies-dimensionelles : convergence [Curien-Konstantopoulos 14]

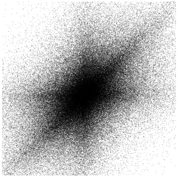
- Loi de $(I^{(n)}(t_1), \ldots, I^{(n)}(t_k))$ converge quand $n \to \infty$.
- Échangeabilité (et même plus) : $(I(t_1), \ldots, I(t_k)) \overset{(loi)}{=} (I(1), \ldots, I(k))$
- Propriétés des finies-dimensionnelles : [C.-Marckert 16]



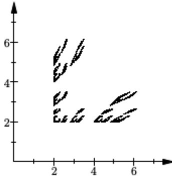
- 2 finies-dimensionnelles : $(I(1), I(2))$.
- 6 branches ?

4 fun facts sur le MBI ad libitum (le 2ème va vous étonner)

Finies-dimensionelles : description [C.-Marckert 16]

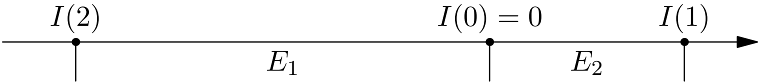


Mesure empirique de $(I(1), I(2))$.



Fractale associée.

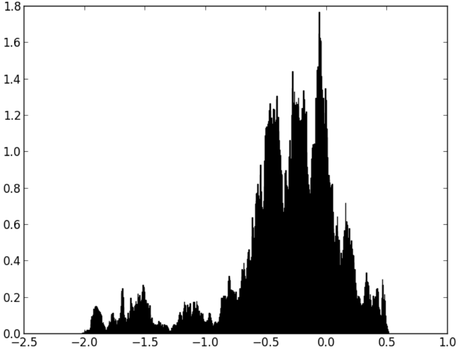
- Loi ν_2 supportée par la fractale.
- $(\lambda_1, \lambda_2) \sim \nu_2$.
- $E_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ et $E_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$, indépendant.
- τ une permutation uniforme de $\{0, 1, 2\}$. Ici : $\tau = (2, 0, 1)$.



4 fun facts sur le MBI ad libitum (le 2ème va vous étonner)

Mesure d'occupation/de De Finetti/temps local :
[Curien-Konstantopoulos 14]

- Mesure d'occupation de $I^{(n)}$ converge en loi
- a une densité (le temps local) est $(1/2 - \epsilon)$-Hölder p.s.



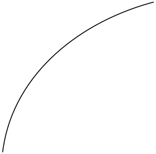
Le MBI ad libitum. Ouf ! Fini pour l'instant.

C'est quoi le pseudo-arc ? Un continuum très particulier.

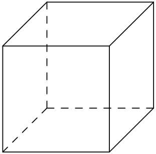
Un peu de topologie

- Un continuum est un espace métrique non vide, compact et connexe. [Nadler 92]

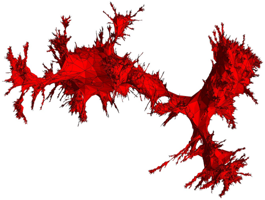
Arc



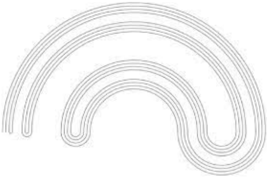
Hypercube



Carte Brownienne



Continuum BJK



BJK : Brouwer-Janiszewski-Knaster.

Le pseudo-arc

Le pseudo-arc est l'unique (à isomorphisme près) continuum :

- chainable,
- indécomposable et
- héréditairement indécomposable.

Le pseudo-arc

Le pseudo-arc est l'unique (à isomorphisme près) continuum :

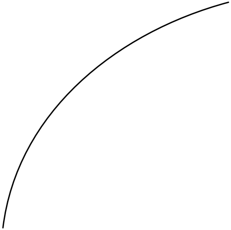
- chainable,
  - si $\forall \epsilon > 0$, $\exists f : C \to [0,1]$ tel que, $\forall x \in [0,1]$, diam $\left(f^{-1}(\{x\})\right) \leq \epsilon$.
  - Abscon !
- indécomposable et
- héréditairement indécomposable.

Le pseudo-arc

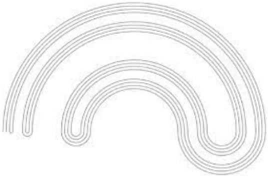
Le pseudo-arc est l'unique (à isomorphisme près) continuum :

- chainable,
- indécomposable et
  - C est décomposable : $\exists A, B$ sous-continua de C tel que $A, B \neq C$ et $C = A \cup B$.
  - indécomposable : pas décomposable.
- héréditairement indécomposable.

Décomposable



Indécomposable



Le pseudo-arc

Le pseudo-arc est l'unique (à isomorphisme près) continuum :

- chainable,
- indécomposable et
- héréditairement indécomposable.
  - $\forall A$ sous-continuum de C, A est indécomposable.

Le pseudo-arc

Le pseudo-arc est l'unique (à isomorphisme près) continuum :

- chainable,
- indécomposable et
- héréditairement indécomposable.

À quoi ça ressemble ?

- Compliqué à dessiner
- [Nadler 92, Exercice 1.23]
- [Lewis-Minc 10] "Drawing the pseudo-arc"
- Un rectangle noir.

Une brève histoire du pseudo-arc

- [Mazurkiewicz 1921] : Un continuum homéomorphe à tous ses sous-continua est-il forcément un arc ?

Une brève histoire du pseudo-arc

- [Mazurkiewicz 1921] : Un continuum homéomorphe à tous ses sous-continua est-il forcément un arc ?
- [Knaster 1922] : Il existe un continuum héréditairement indécomposable.

Une brève histoire du pseudo-arc

- [Mazurkiewicz 1921] : Un continuum homéomorphe à tous ses sous-continua est-il forcément un arc ?
- [Knaster 1922] : Il existe un continuum héréditairement indécomposable.
- [Bing 1948] et [Moise 1948] : La réponse est non avec deux constructions différentes.

Une brève histoire du pseudo-arc

- [Mazurkiewicz 1921] : Un continuum homéomorphe à tous ses sous-continua est-il forcément un arc ?
- [Knaster 1922] : Il existe un continuum héréditairement indécomposable.
- [Bing 1948] et [Moise 1948] : La réponse est non avec deux constructions différentes.
- [Bing 1951] :
  - Unicité.
  - Knaster, Bing et Moise : même objet.
  - "Most compact continua are pseudo-arcs" [Theorem 2, Bing 51].

Une brève histoire du pseudo-arc

- [Mazurkiewicz 1921] : Un continuum homéomorphe à tous ses sous-continua est-il forcément un arc ?
- [Knaster 1922] : Il existe un continuum héréditairement indécomposable.
- [Bing 1948] et [Moise 1948] : La réponse est non avec deux constructions différentes.
- [Bing 1951] :
  - Unicité.
  - Knaster, Bing et Moise : même objet.
  - "Most compact continua are pseudo-arcs" [Theorem 2, Bing 51].

Bonus :

- Quel est le prénom de "R. H. Bing" ?
- Pourquoi le nom de "pseudo-arc" ?

Le pseudo-arc. Ouf ! Fini.

Construction d'un continuum à partir du MBI ad libitum. Non...

Limites inverses

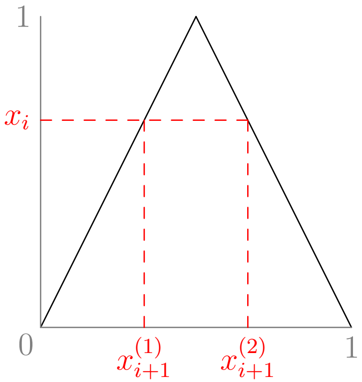
- Construction via les limites inverses :
  Soit $(f_i)_{i\geq 1}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et
  soit $(J_i)_{i\geq 1}$ des intervalles de $\mathbb{R}$ tel que $f_i(J_{i+1}) = J_i$. Alors,

$$\left\{ (x_i)_{i\geq 1} \in \prod_{i\geq 1} J_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ ou } x_{i+1} \in f_i^{-1}(\{x_i\}) \right\}$$

  est un continuum.
  En mot, c'est l'ensemble des suites d'antécédents des points de J_1.

Exemple

Pour tout i, $f_i = f_1$ et $J_i = [0, 1]$.



- $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \ldots)$
- $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \ldots)$
- $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \ldots)$
- $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \ldots)$
- $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots)$
- $(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots)$
- ...
- Métrique : $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$.

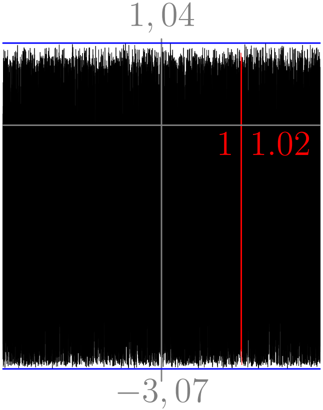
[Kiss-Solecki 20]

- $(f_i)_{i\geq 1} = (B_i)_{i\geq 1}$, la suite de MB bilatères indépendants.
- $(J_i)_{i\geq 1}$ c'est le range de $(B_i \circ B_{i+1} \circ \dots)$ (cf. 2ème fun fact).

4 fun facts sur le MBI ad libitum (le 2ème va vous étonner)

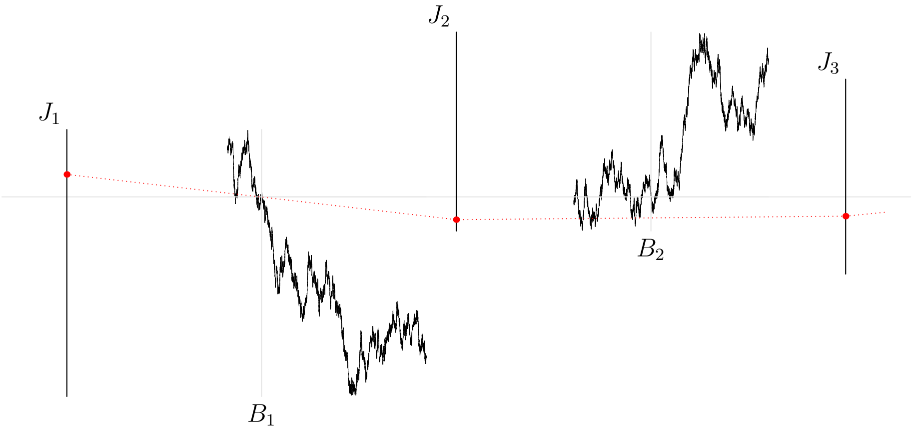
Bornitude ? OUI et même mieux [Curien-Konstantopoulos 14]

- $\exists J_1$ sous-intervalle de $\mathbb{R}$, $I(t) \in J_1$.
- Loi de J_1 ? Connu, mais n'est pas une loi simple.
- $\forall J_2$ sous-intervalle de $\mathbb{R}$, $I(J_2) = J_1$.



Le continuum du mouvement brownien itéré ad libitum

- $(f_i)_{i\geq 1} = (B_i)_{i\geq 1}$, la suite de MB bilatères indépendants.
- $(J_i)_{i\geq 1}$ c'est le range de $(B_i \circ B_{i+1} \circ \ldots)$.



Le continuum du mouvement brownien itéré ad libitum

- $(f_i)_{i\geq 1} = (B_i)_{i\geq 1}$, la suite de MB bilatères ind.
- $(J_i)_{i\geq 1}$ c'est le range de $(B_i \circ B_{i+1} \circ \ldots)$.
- Continuum aléatoire : [Kiss-Solecki 20]

$$\mathcal{C} = \left\{ (x_i)_{i\geq 1} \in \prod_{i\geq 1} J_i : x_{i+1} \in B_i^{-1}(\{x_i\}) \right\}.$$

Théorème (C.-Curien 21)

$\mathcal{C}$ n'est pas le pseudo-arc p.s.

En quoi ce résultat négatif est positif ?

Le continuum $\mathcal{C}$ est

- chainable p.s.
  - comme toute limite inverse [Nadler 92]
- indécomposable p.s. [Kiss-Solecki 20],
- pas héréditairement indécomposable p.s. [C.-Curien 21].

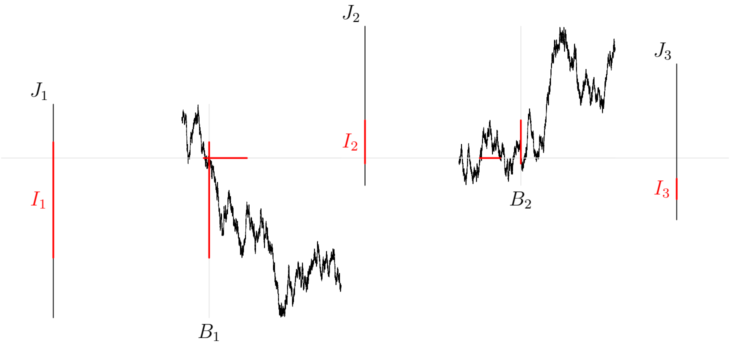
C'était une question légitime de [Kiss-Solecki 20] en vertu de "Most compact continua are pseudo-arcs" [Bing 51].

C'est quoi un sous-continuum de $\mathcal{C}$?

Proposition (Nadler 92)

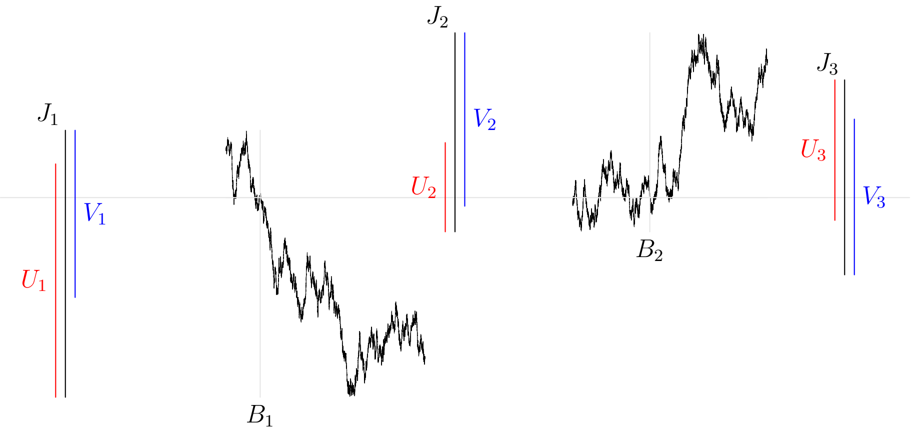
Tout sous-continuum de $\mathcal{C}$ est une limite inverse de $(I_i)_{i\geq 1}$ tel que

- *I_i sous-intervalle de J_i et*
- $\forall i$, $B_i(I_{i+1}) = I_i$.



$\mathcal{C}$ est indécomposable ?

[Kiss-Solecki 20] : idée de la preuve



$\mathcal{C}$ est héréditairement indécomposable ?

[C.-Curien 21] : idée : chercher des sous-intervalles de plus en plus petit.

Proposition (C.-Curien 21)

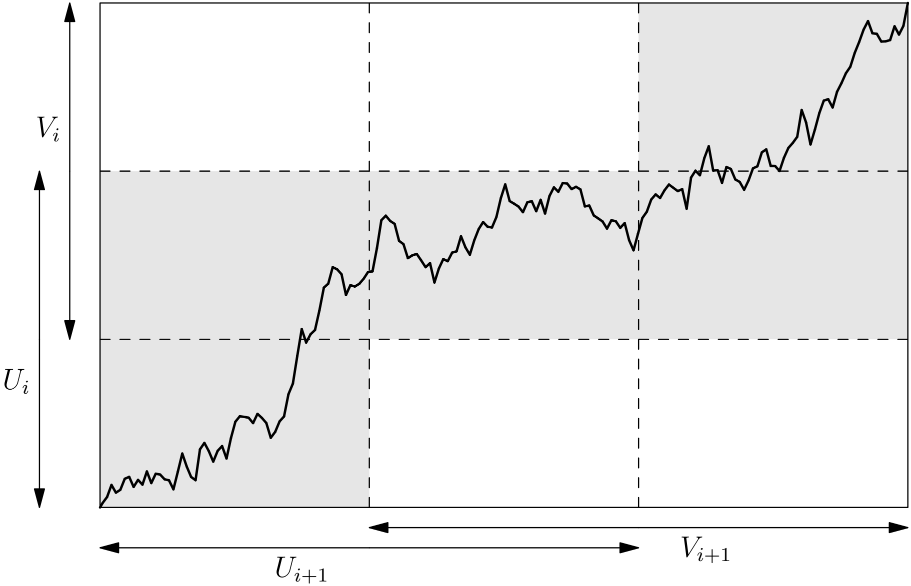
Pour tout $\varepsilon > 0$ (suffisement petit), avec proba au moins

$$p_\varepsilon = \prod_{i=1}^{\infty} 1 - 2(\varepsilon^{(5/4)^{i-1}})^{1/8} > 0,$$

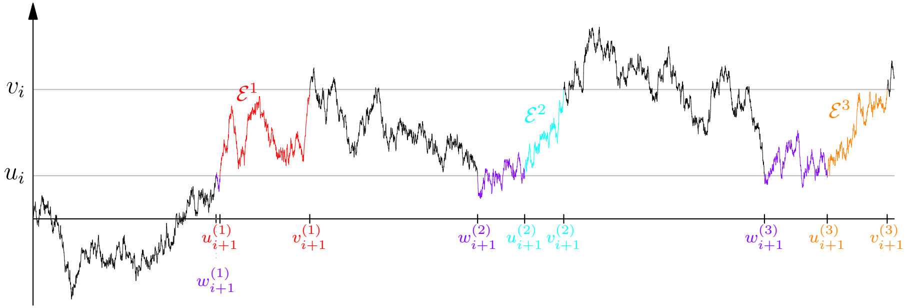
il existe $(U_i)_{i\geq 1}$ et $(V_i)_{i\geq 1}$ tel que

- U_i, V_i *sous-intervalles de* J_i,
- $U_i \not\subseteq V_i$ *et* $V_i \not\subseteq U_i$,
- $U_i \cap V_i \neq \emptyset$,
- $U_i = B_i(U_{i+1})$ *et* $V_i = B_i(V_{i+1})$,
- $|U_i|, |V_i| \leq \varepsilon^{(5/4)^{i-1}}$.

On cherche des excursions de ce type dans B_i :



Plusieurs excursions possibles :



Perspectives

C'est quoi $\mathcal{C}$?

- Ce n'est pas le pseudo-arc.
- Pour l'instant, on ne sait pas.
- Est-ce constant à homoémorphisme près ?

Merci de m'avoir écouté !