Vitesses de convergence dans le TLC pour les martingales discrètes : le cas non stationnaire [Avec J. Dedecker et F. Merlevède]

$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingale dans L^2, adaptée à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $M_0=0$

<u>Notations</u> : $\xi_k = M_k - M_{k-1}$ $(k>0)$, $V_n = \operatorname{Var} M_n = \sum_{k=1}^{n} E(\xi_k^2)$

$F_n(x) = P(M_n \leq x\sqrt{V_n})$; $\Phi(x) = P(\mathcal{N}(0,1) \leq x)$; $\Delta_{n,\infty} = \|F_n - \Phi\|_\infty$

<u>Un résultat classique</u> : Heyde et Brown (1970), Häusler (1988 pour $p>4$)

Soit $\langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} E(\xi_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1})$; pour $p \in]2,\infty[$

$$\Delta_{n,\infty} \leq c_p V_n^{-p/(2p+2)} \left[\|\langle M\rangle_n - V_n\|_{p/2}^{p/2} + \sum_{k=1}^{n} E(|\xi_k|^p) \right]^{\frac{1}{(p+1)}}$$

<u>Commentaire</u> : même si $\langle M\rangle_n = V_n$ p.s. et $E(|\xi_k|^p) \leq C\, E(\xi_k^2)$ la vitesse de convergence est assez lente :

$$\Delta_{n,\infty} = O\left(V_n^{-(p-2)/(2p+2)}\right) : \left(= O(V_n^{-1/8}) \text{ pour } p=3 \right)$$

A Le cas des variances conditionnelles constantes $\left(V_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \right)$

(H1) $E(\xi_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) = E(\xi_k^2)$ p.s. pour tout $k>0$ (donc $\langle M \rangle_n = V_n$)

(H2) $\sup\limits_{k \geq 1} \left[E(|\xi_k|^p) / E(\xi_k^2) \right] < +\infty$

Grams (1972) : si $0 < \alpha \leq E(\xi_k^2) \leq \beta < \infty$ pour tout $k>0$, $\Delta_{n,\infty} = O(V_n^{-1/4})$ sous (H1) et (H2) avec $p=3$. Bolthausen (1982) $\Delta_{n,\infty} \geq C\, V_n^{-1/4}$ sur un exemple, avec les mêmes hypothèses.

Minorations pour tout $p>2$ [DMR 21]

Prop. 1 On peut construire $(\xi_k)_{k>0}$ telle que $E(\xi_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 1$ p.s.,

$$\sup_{k \geq 1} E(|\xi_k|^p) \leq 5^{p-2} + \int_{\mathbb{R}} |y|^p e^{-y^2/2} \, dy / \sqrt{2\pi} \quad \text{et}$$

$$\Delta_{n,\infty} \geq \frac{6}{100} \, n^{-(p-2)/(2p-2)} \quad \text{pour } n \geq 20.$$

Conséquence : la vitesse $n^{-(p-2)/(2p-2)}$ n'est pas améliorable ...

Les majorations se font en passant par les coûts de transport.

Déf Soit $\mathcal{L}(\mu,\nu)$ l'ensemble des lois sur $\mathbb{R}^2$ avec lois marginales μ et ν et $r \in]0,1]$: $K_r(\mu,\nu) = \inf \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} |x-y|^r \, P(dx,dy) : P \in \mathcal{L}(\mu,\nu) \right\}$

- $\Delta_{n,\infty} \leq 1.40 \left(K_r \left(P_{M_n/\sqrt{V_n}}, \gamma_1 \right) \right)^{1/(r+1)}$ $\quad \gamma_v = \text{loi } n(0,v)$

DMR (2021) Sous (H1) et (H2), pour $p \in]2,3[$,

$$\begin{cases} K_{p-2}(P_{M_n}, \gamma_{V_n}) \leq C_p \text{, et, pour } p = 3, \\ K_1(P_{M_n}, \gamma_{V_n}) \leq C_3 \log V_n \end{cases}$$

[$p<3$, le coût reste borné]

conséquence $\Delta_{n,\infty} = O\left(V_n^{-(p-2)/(2p-2)}\right)$ si $p<3$, $\Delta_{n,\infty} = O\left(V_n^{-1/4}\sqrt{\log V_n}\right)$ $(p=3)$

(Perte d'un facteur $\sqrt{\log V_n}$ pour $n=3$)

B Variances conditionnelles non constantes

Heyde et Brown (1970) : terme $V_n^{-p/(2p+2)} \left[E \left| \sum_{k=1}^{n} E(\xi_k^2 - E(\xi_k^2) \mid \mathcal{F}_{k-1}) \right| \right]^{1/(p+1)}$

$\left(p \in]2,4] \Rightarrow p/2 \in]1,2] \right)$ en plus....

Soit $D_k = E(\xi_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) - E(\xi_k^2)$, si les sommes $D_1 + D_2 \cdots + D_n$ vérifient

(VBE ou MZ) $\quad E\left(|D_1 + D_2 + \cdots + D_n|^{p/2} \right) \leqslant a_p \left(E|D_1|^{p/2} + E|D_2|^{p/2} \cdots + E|D_n|^{p/2} \right)$,

alors, puisque $\quad E\, |D_k|^{p/2} \leqslant 2^{p/2}\, E(|\xi_k|^p)$, si (H2) est

vérifiée $\left[(H2) : \sup_{k \geq 1} \left(E(|\xi_k|^p) / E(\xi_k^2) \right) < \infty \right]$

$$V_n^{-p/(2p+2)} \left[E\, |D_1 + D_2 \cdots + D_p|^{p/2} \right]^{1/(p+1)} \leqslant C_p\, V_n^{-(p-2)/(2p+2)} ;$$

Donc, dans le meilleur des cas, le terme additionnel est du même ordre que le terme du cas des variances conditionnelles constantes....

B <u>Suite</u> <u>Approche fondée sur K_r</u> (DMR 21)

<u>Rappel</u> $r \leq 1$: $K_r(\mu,\nu) = \sup\left\{ \int f d\mu - \int f d\nu : f \in \Lambda_r \right\}$

où $\Lambda_r = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ t.q. } |f(x) - f(y)| \leq |x-y|^r \text{ pour tout } (x,y) \right\}$

Soit T_n de loi $\mathcal{N}(0, V_n)$, on majore $E(f(M_n) - E f(T_n))$ à l'aide de la méthode de Lindeberg ... Dans le cas dépendant, interviennent les quantités
$$U_{\ell,n}(p) = \left\| \left(\xi_{\ell-1}^2 + \sigma_{\ell-1}^2 \right)^{\frac{p}{2}-1} \sum_{k=\ell}^{n} \left(E(\xi_k^2 \mid \mathcal{F}_{\ell-1}) - \sigma_k^2 \right) \right\|_1$$

avec $\sigma_k^2 = E(\xi_k^2)$

Prop (DMR 21) si (H2) vraie $\left[(H2) : \sup_{k \geq 1} \left[E|\xi_k|^p / \sigma_k^2 \right] < \infty \right]$

(i) $p < 3$: $K_{p-2}(P_{M_n}, P_{T_n}) \leq C_p \left(1 + \sum_{\ell=2}^{n} \frac{U_{\ell,n}(p)}{\sigma^2 + \sigma_\ell^2 + \sigma_{\ell+1}^2 + \dots + \sigma_n^2} \right)$

$\sigma^2 = \max(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$

(ii) $p = 3$ $K_1(P_{M_n}, P_{T_n}) \leq C_3 \left(\log\left(1 + \frac{V_n}{\sigma^2}\right) + \sum_{\ell=2}^{n} \frac{U_{\ell,n}(p)}{\sigma^2 + \sigma_\ell^2 + \sigma_{\ell+1}^2 + \dots + \sigma_n^2} \right)$

$\boxed{B}$ **Exemple** $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ suite stationnaire de différences de martingales,

$$\xi_k = a_k X_k \;,\quad a_1 = 1 \;,\; (a_k)_k \searrow 0 \;,\; \sum_{k>0} a_k^2 = \infty$$

Hypothèses : $E(X_0^2) = 1$, $X_0 \in L^p$ $(p \in]2,3]$ et

$$(D1) \quad \sum_{k\geq 1} \| (1+|X_0|^{p-2})(E(X_k^2 \mid \mathcal{F}_0) - 1) \|_1 < \infty$$

$p \in]2,3[$: $K_{p-2}(P_{M_n}, P_{T_n}) \leq C_p \left(1 + \sum_{k=1}^{n} (1 + a_{k+1}^2 + \cdots + a_n^2)^{-1} a_k^p \right)$

$p = 3$ $\quad K_1(P_{M_n}, P_{T_n}) \leq C_3 \left(\log(1+V_n) + \sum_{k=1}^{n} (1 + a_{k+1}^2 + \cdots + a_n^2)^{-1} a_k^3 \right)$

Cas particulier $\quad a_k = k^{-a}$ avec $a \in]0, 1/2]$: $\sum_{k=1}^{n} a_k^p / (1 + a_{k+1}^2 + a_n^2) \leq C$

avec C indépendante de n

$$K_{p-2}(P_{M_n}, P_{T_n}) = O(1) \text{ pour } p<3 \,,\quad K_1(P_{M_n}, P_{T_n}) = O(\log V_n) \quad (p=3)$$

et donc $\quad \Delta_{n,\infty} = O\left(V_n^{-p-2/(2p-2)}\right) \quad (p<3)$

$$\Delta_{n,\infty} = O\left(V_n^{-1/4} \sqrt{\log V_n}\right) \quad (p=3)$$